С. Г. КОНОНОВ
Р. И. ТЫШКЕВИЧ
В. И. ЯНЧЕВСКИЙ

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ

Учебное пособие для студентов механико-математического факультета специальности G 31 03 01 "Математика"

В трех частях

Часть 1

МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ

МИНСК
БГУ
2003

УДК 510.2(075.8)
ББК 22.12я73
К64

Рецензенты:
ректор Академии последипломного образования
доктор физико-математических наук, профессор *О. И. Тавгень*;
заведующий кафедрой теории функций Белгосуниверситета
доктор физико-математических наук, профессор *А. А Килбас*

Рекомендовано Ученым советом
механико-математического факультета
5 ноября 2002 года, протокол № 2

Кононов С. Г.
К64 Введение в математику: Учеб. пособие для студ. мех.-мат. фак. спец. G 31 03 01 "Математика". В 3 ч. Ч. 1. Множества и функции / С. Г. Кононов, Р. И. Тышкевич, В. И. Янчевский. – Мн.: БГУ, 2003. – 171 с.: ил.
ISBN 985-445-936-5(ч. 1).

Учебное пособие "Введение в математику" состоит из трех частей (ч. 1. Множества и функции; ч. 2. Числа и координаты; ч. 3. Мощности и порядки). В первой части рассматриваются основные теоретико-множественные понятия и конструкции, а также начала математической логики, лежащие в основе математики. Изложение ведется как в рамках канторовой ("наивной") теории множеств, так и с использованием аксиоматического метода.

Адресовано в первую очередь студентам-математикам, приступающим к изучению университетского курса математики. Также будет полезно преподавателям и студентам других специальностей (в том числе и гуманитарных), учебные планы которых включают математические дисциплины. Может быть использовано для самообразования.

УДК 510.2(075.8)
ББК 22.12я73

ISBN 985-445-936-5(ч. 1)
ISBN 985-445-937-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

"Прервалась дней связующая нить,
Как мне обрывки их соединить!
Пойдемте вместе".

В. Шекспир. Гамлет

Предлагаемая книга возникла как отклик на два важных обстоятельства, в сильной степени изменивших задачи и направление университетского математического образования в последнее время. Теперь уже без преувеличения можно утверждать, что прошлый век (вплоть до 90-х гг.) оказался викторианской эпохой математического образования сначала в Российском государстве, а затем в СССР. Университетское математическое образование опиралось на школьное (гимназическое), имевшее в тот период очень высокий уровень. Так, например, школьник, открывший в наши дни учебник по геометрии А. П. Киселева за 1909 г. (или его же учебник по алгебре), может обнаружить там много интересных и важных фактов и понятий, которые не включены сейчас в школьную программу, поскольку в результате различных реформ из учебных программ исчезли многие ранее традиционные разделы "школьной математики". Это поставило перед университетским образованием сложную задачу – преодолеть разрыв между объемом знаний, получаемых в школе, и теми требованиями, которые предъявляются к исходным знаниям начинающего студента для успешного освоения им университетских математических курсов. Существование во времена СССР Всесоюзной заочной математической школы (а в БССР еще и ее республиканского аналога), сделавшей много полезного для воспитания будущих студентов-математиков, а также в новых условиях специализированных школ (лицеев) и математических кружков при высших учебных заведениях позволило ликвидировать упомянутый разрыв лишь факультативно. Поэтому необходимо было искать другие пути решения проблемы.

Во второй половине 80-х гг. прошлого столетия в Белорусском государственном университете на механико-математическом факультете в программу обучения студентов была включена новая обязательная дисциплина "Введение в математику". Ее задачами являлись изложение некоторых разделов, не вошедших в школьные программы (например, элементов комбинаторики), а также ознакомление первокурсников с теорией множеств (в особенности со свойствами бесконечных множеств) как с базой, на которой будет основано все дальнейшее изложение математики.

В последнее время возникло еще одно обстоятельство, вызвавшее реформирование названной дисциплины и определившее тем самым содержание этого пособия и форму изложения. Речь идет о новых специальностях, связанных с информатикой и применением математики в экономике, банковском деле и т. д. и повлекших смещение акцентов в целях получения математического образования.

В связи с увеличением объема курсов прикладного характера оказался оттесненным на второй план важный аспект университетского математического образования – создание общего представления о математике не как о собрании разрозненных математических дисциплин, а как о науке, изучающей с помощью аксиоматического метода необъятный мир математических структур, свойства которых находят все большее применение в самых разнообразных областях человеческой деятельности.

Мы являемся твердыми сторонниками той точки зрения, что математическая культура (воспитание которой есть одна из самых важных задач университетского математического образования) состоит не только в знании конкретных рецептов действий, даваемых той или иной теорией, но и в понимании того, с какими объектами работает математик (в алгебре, теории чисел, математическом анализе, теории вероятностей и т. д.). Что означает, например, словосочетание "данный объект существует" или "обладает определенным свойством"[1)]? По нашему мнению, покидающий университетские стены выпускник, слабо представляющий, что скрывается за выражениями: "натуральное число", "целое число", почему для чисел верен дистрибутивный закон, что такое бесконечное и конечное множества, или незнакомый с аксиоматикой геометрии и т. д., вряд ли может считаться специалистом-математиком с университетским образованием. Скорее, образование такого специалиста сродни инженерному, где на первый план выступает хорошее знание вышеупомянутых рецептов и границ их применимости. Принципиально новые "рецепты" (т. е. новые приложения математики) могут возникнуть лишь как результат глубокого проникновения в сущность фундаментальных математических закономерностей, что требует высокой математической культуры исследований.

В этом учебном пособии, как нам представляется, предпринята первая попытка решения двух основных задач в условиях исторического излома, возникшего в результате крушения СССР: во-первых, перебросить

[1)] В этом отношении показательна следующая цитата из предисловия к первому изданию уже упоминавшегося учебника по геометрии А. П. Киселева: "В большинстве русских оригинальных учебников по геометрии теоремы равенства несоизмеримых отношений доказываются от противного. Мы предпочли другой путь. *Прежде чем доказывать равенство, необходимо точно установить, что разумеется под этим термином*".

мост, который соединял бы школьное математическое образование и классическое университетское, и, во-вторых, не избегая обращения к аксиоматическому способу изложения, с самого начала внести в преподавание математики постановку глубоких и естественных проблем, определяющих место основных математических структур и понятий в общей системе человеческого знания.

Конечно, было бы проявлением необоснованного оптимизма полагать, что во вводном курсе удастся без использования достаточно глубокого знания математической логики строго изложить аксиоматическую теорию множеств, например аксиоматику Цермело – Френкеля. Поэтому наш рассказ об ее аксиомах носит в значительной мере описательный характер. Более того, рассчитывая прежде всего на первокурсника, мы ведем изложение теории множеств как бы на двух уровнях. Основная часть изложения базируется на "наивной" канторовой теории множеств, но при этом мы время от времени вкрапляем в текст обсуждение возникающих понятий на более высоком уровне, присоединяя шаг за шагом аксиомы системы Цермело – Френкеля, чтобы в результате у студента возникло представление об одном из аксиоматических вариантов теории множеств.

Упомянутая двухуровневость позволяет обучающемуся при желании вначале ограничиться "наивным" пониманием множества. Позже он может подняться на аксиоматический уровень, если, например, захочет получить ответы на следующие вопросы: как надо понимать фразу "данное множество существует"; каков тот необходимый минимум понятий и утверждений, на основе которого можно построить всю теорию множеств и, более того, всю математику? Какими бы сложными ни являлись эти проблемы, умолчание или откладывание обсуждения их на более позднее время (с частым забвением впоследствии), по нашему мнению, не способствует развитию математической культуры. Разумеется, мы лишь очерчиваем здесь проблемы и пытаемся вместе с читателем делать первые шаги в направлении их решения.

Еще одна проблема, которая не обсуждается в этом пособии, но к рассмотрению которой подготавливается студент всем его содержанием, – это *проблема непротиворечивости.*

В математике изучаются свои особые "миры": "миры чисел", "миры геометрий", "миры функций" и т. п. Характер получения нового знания при использовании аксиоматического метода таков: имеются исходные объекты (в каждом из таких миров) и какие-то их свойства (запечатленные в аксиомах). Дальнейшее углубление знания об этих мирах происходит с помощью доказательства различных утверждений о них. Сами доказательства являются цепочкой рассуждений по схеме: если верны некоторые утверждения, то с помощью логики мы приходим к заключению об истинности доказываемого утверждения. Эти рассуждения есть не что иное, как следствие неких логических законов, правомерность применения которых не обсуждается. Последнее обстоятельство позволяет усомниться в истинности доказанного утверждения. Особенно показателен в этом отношении метод доказательства "от противного", впрямую использующий предположение о том, что в математике нельзя доказать (т. е. построить цепочку умозаключений, опирающихся на логические законы) двух взаимоисключающих друг друга утверждений. Однако само это предположение (на первый взгляд очевидное), как удалось установить в прошлом веке, нельзя в разумном смысле ни доказать, ни опровергнуть. Таким образом, наша уверенность в том, что аксиоматические теории (а с ними и математика) лишены противоречий – не более чем общее соглашение. Впрочем, в пользу этого соглашения говорят поразительные успехи человека в познании и преобразовании мира. В контексте сказанного ситуация с будущим математики не является более апокалипсической, чем, например, с нами самими: каждый из нас живет, не имея в данный момент информации о том, что с нами случится завтра.

Наконец, последний вопрос, который не обсуждается в этом учебном пособии из-за недостатка у студента первого курса предварительных знаний, но который следует иметь в виду, – это так называемая *проблема полноты*. Неформально она может быть описана так. Предположим, что мы рассматриваем совокупность некоторых объектов с системой аксиом, описывающих взаимоотношения между этими объектами, и правилами, по которым строятся доказательства. В этой ситуации возникает естественный вопрос: можно ли всегда в рамках рассматриваемой теории установить, истинно или ложно любое высказывание, выраженное в терминах этой теории? Следует подчеркнуть, что здесь речь не идет о том, что в данный момент мы не располагаем доказательством истинности или ложности такого высказывания, а о том, существуют ли высказывания, для которых такого доказательства (в рамках этой теории) принципиально существовать не может. Ответ на поставленный вопрос дает знаменитая теорема Геделя[1)] о неполноте. Допуская вольность речи, смысл этой теоремы можно выразить следующим образом: всякая аксиоматическая теория, включающая в качестве своей части арифметику натуральных чисел, содержит вопросы, на которые мы никогда (в рамках этой теории) не сможем дать ни положительного, ни отрицательного от-

---

[1)] Курт Гедель (1906–1978) – австрийский математик, один из создателей современной математической логики.

вета. Конечно, последнее обстоятельство показывает, что аксиоматический метод не всесилен, однако большинство достижений математики связано именно с его применением, и он остается по-прежнему мощным инструментом в ее развитии. Упомянутые проблемы общего характера даже для их точной постановки (а тем более решения) требуют значительного знания математической логики. В книге обсуждаются только элементы математической логики – это лишь начало долгой и кропотливой работы, предстоящей заинтересованному читателю.

Обсуждение аксиоматического метода начинается с общих замечаний. Затем формулируются аксиомы системы Цермело – Френкеля и приводятся два фрагмента, относящиеся к языку математической логики. В качестве примера аксиоматической теории рассмотрена аксиоматика Пеано натуральных чисел, на базе которой происходит построение целых и рациональных чисел. Оставляя математическому анализу построение вещественных чисел (а алгебре – комплексных), мы все же не могли обойти вниманием обсуждение фундаментальной идеи введения координат на прямой, которая потребовала включения части гильбертовой аксиоматики евклидовой планиметрии.

Названные темы входят в две первые части. Первая часть – "Множества и функции" – сравнительно элементарна. Мы полагаем, что ее содержание должно включаться как неотъемлемая часть в программу курса, не взирая на отведенное количество часов. Для студентов заочной формы обучения первая часть книги могла бы стать основным учебником.

Вторая часть – "Числа и координаты" – представляется нам особенно полезной для педагогических отделений.

Третья часть – "Мощности и порядки" – посвящена бесконечным множествам. В ней вводятся некоторые основные понятия теории множеств (например, мощности и ординалы), о которых мало говорится (или вообще не говорится) в общих математических курсах, но владение которыми, на наш взгляд, приличествовало бы каждому математику. Ее содержание, как, впрочем, и второй части, подошло бы, например, для общих курсов, читаемых магистрантам и аспирантам.

Мы старались (особенно вначале) проиллюстрировать возникающие идеи и понятия как можно большим количеством примеров и упражнений, чтобы облегчить начинающим непростой психологический переход к более абстрактному (по сравнению со школьным) пониманию математических понятий.

Учебное пособие адресовано прежде всего студентам математических факультетов, начинающим учебу в университете и готовящим себя к профессиональной деятельности в области математики. Две первые части мы рекомендовали бы использовать в Лицее БГУ, в математических классах общеобразовательных школ и гимназий, а также при подготовке математических лекций для студентов других специальностей (в том числе и гуманитарных).

Книга содержит расширенное изложение лекций, которые читались для студентов педагогического и производственного отделений механико-математического факультета Белгосуниверситета в рамках дисциплины "Введение в математику". Мы далеки от мысли, что кто-либо (в том числе и мы сами) способен за отведенные учебным планом 34 часа достаточно подробно изложить студентам все содержание этой книги. Мы считаем ее полезной для самообразования и надеемся, что она найдет заинтересованных и вдумчивых читателей. Помимо этого, мы надеемся, что в будущем дисциплина "Введение в математику" будет включаться в учебные планы математических факультетов как годовой курс. Материалы учебного пособия могут быть использованы при подготовке спецкурсов и заданий по учебно-исследовательской работе студентов.

В книге принят следующий порядок нумерации и ссылок. Нумерация глав – сквозная по всем трем частям. В каждой главе имеется своя нумерация параграфов, которая сохраняется при ссылках внутри главы. Если же при ссылке нужно выйти за пределы главы, используется двузначная нумерация, в которой первое число означает номер главы, а второе – номер параграфа. Например, § 2.4 обозначает четвертый параграф второй главы. По такому же принципу устроена нумерация теорем, следствий, упражнений и т. д. В каждом параграфе она своя и сохраняется при ссылке внутри параграфа. Если же при ссылке нужно выйти за пределы параграфа (главы), то используется двузначная (трехзначная) запись номера. Например, теорема 2.1 обозначает теорему 1 в § 2 текущей главы, упражнение 4.12.3 обозначает упражнение 3 в § 12 главы 4.

Мы благодарим всех наших коллег, принявших участие в обсуждении содержания учебного пособия. Мы признательны нашим слушателям – студентам механико-математического факультета БГУ (особенно Максиму Бояренко, Павлу Скумсу и Степану Минченкову), чья заинтересованность, многочисленные вопросы, а также ответы на вопросы лекторов стимулировали написание книги.

ГЛАВА 1. МНОЖЕСТВА И ОТНОШЕНИЯ

“Только математикам дано
достичь несомненности и ясности,
ибо они исходят из того,
что наиболее легко и просто”.

Р. Декарт[1]. Математические размышления

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Приступая к систематическому изучению математики, обратим внимание на одну ее важную отличительную черту – *использование доказательств*. В этом ее отличие, например, от физики, где физические законы также могут выводиться из других физических законов, однако всякий такой закон верен постольку, поскольку он согласуется с экспериментом. Математический же закон считается верным только в том случае, когда он снабжен доказательством. Использование эксперимента при установлении математических истин также играет важную роль, но лишь на стадии поиска гипотез о существовании той или иной закономерности.

Так, например, рассматривая квадратные трехчлены

$$x^2 + 3x - 4, \quad x^2 + 7x + 3, \quad x^2 - x - 1,$$

можно заметить, что для каждого из них сумма корней есть число, противоположное коэффициенту при x, а произведение корней совпадает со свободным членом. Это наблюдение позволяет предположить, что, возможно, такое же утверждение верно и в общей ситуации. Однако с тем, что этим свойством обладает любой квадратный трехчлен со старшим коэффициентом, равным 1, математик согласится лишь после того, как ему будет предъявлено *доказательство истинности* этого утверждения (т. е. цепочка умозаключений, показывающая, что рассматриваемое свойство вытекает из некоторых фактов, которые *считаются заведомо верными*). Такой подход математика принципиальным образом отличается от позиции физика: для последнего вышеупомянутое свойство квадратных трехчленов представлялось бы “физическим законом”, как только оно было бы проверено в “большом” числе случаев и при этом не был бы найден ни один контрпример.

Другой пример такого же рода. Рассматривая треугольники и трапеции, можно заметить, что суммы их внутренних углов зависят лишь от

[1] Рене Декарт (1596–1650) – французский философ, математик, физик и физиолог.

количества сторон (но не от формы и размеров), т. е. равны соответственно π и 2π, и могут быть представлены в виде π (3 – 2) и π (4 – 2). Возникающая при этом гипотеза о том, что сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $\pi(n - 2)$, завершает наш эксперимент. Теперь эта гипотеза требует доказательства (вспомните его!).

Математические законы (истины) бывают двух типов: *аксиомы* и *теоремы* (*леммы*, *утверждения*, *следствия* и т. п.). ***Аксиомы*** (греч.) – это основные, исходные положения теории, которые считаются самоочевидными, т. е. первоначально верными (верными по определению), и из которых все остальное содержание теории извлекается чисто логическими средствами. Аксиомы не требуют доказательств. Напротив, каждая теорема (лемма и др.) должна иметь доказательство, которое выводит ее из аксиом непосредственно или из уже доказанных утверждений с помощью цепочки логических умозаключений, принятых в математике[1].

Аксиомы формулируются в терминах некоторых понятий, которые называются *первичными* понятиями теории. Остальные понятия теории определяются через первичные понятия и аксиомы и называются *производными.* Например, в евклидовой[2] планиметрии первичными являются понятия точки и прямой, а производными – понятия окружности, круга, многоугольника, ломаной и т. п.; в теории чисел первичными являются натуральные числа, а целые, рациональные и действительные числа – производные понятия.

Таким образом, построение “здания” математики происходит следующим образом. Исходный строительный материал – это первичные понятия и аксиомы о них. Затем определяются производные понятия. Основной целью является открытие и доказательство теорем о первичных и производных понятиях. Предыдущие два примера показывают, что первичные понятия и их свойства, описываемые аксиомами, в каждом разделе математики могут быть своими. Если же задаться целью найти первичные понятия, на основе которых можно было бы построить всю известную к настоящему времени математику, то, по-видимому, прежде всего следует обратиться к понятию *множества* (и *элемента*). Действительно, известные читателю примеры (а также многие другие, которые появятся далее) показывают, что понятие множества является “хорошим претендентом” на роль первичного понятия в математике. Помимо этого,

---

[1] Основные логические операции, используемые в математических рассуждениях, рассматриваются в § 4.

[2] Евклид (III в. до н. э.) – древнегреческий математик, автор знаменитого труда “Начала”, состоящего из 13 книг, в которых впервые систематизирована и логически строго изложена элементарная геометрия.

как будет показано ниже, попытка описать понятие множества, дав ему какое-либо общее определение, может привести к противоречиям, которые в математике, разумеется, запрещены.

Итак, в дальнейшем изложении понятие множества будет первичным, неопределяемым понятием. Все же, чтобы более аргументированно обосновать необходимость аксиоматического подхода к понятию множества, в следующем параграфе мы рассмотрим другой (исторически первый) взгляд на это понятие, предложенный основоположником теории множеств Г. Кантором[1)].

§ 2. КАНТОРОВО ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОЖЕСТВА. АНТИНОМИИ

Следуя Г. Кантору, рассмотрим “определение” множества.

Множество, *или* ***совокупность***, *– это собрание определенных и различных объектов нашей интуиции или интеллекта, мыслимое в качестве целого.*

Объекты, составляющие множество, называются ***элементами*** этого множества. Для обозначения множеств будем, как правило, использовать прописные латинские буквы A, B, C, ..., для обозначения элементов – строчные латинские буквы a, b, c, … . Высказывание “a является элементом множества A” записывается в виде

$$a \in A. \tag{1}$$

Высказывание (1) формулируется также следующим образом: “a принадлежит множеству A”, “a содержится в множестве A”, “множество A содержит элемент a”. Знак $\in$ называется ***символом принадлежности***[2)].

Нашему интуитивному пониманию термина “множество” помогут некоторые примеры. Вы хорошо представляете себе множество A студентов вашей учебной группы, множество B автомобилей, зарегистрированных в Минске, множество C слов, использованных в этой книге (в последнем примере два слова считаются равными, если они записываются одинаково, хотя могут находиться в разных местах текста). Для задания каждого из этих множеств можно составить список элементов множества, выписывая их последовательно в каком-либо порядке. Для первого множества – это список фамилий студентов: A = {Михайлов, Петров, ...,

---

[1)] Георг Кантор (1845–1918) – немецкий математик.

[2)] $\in$ – стилизованная буква ε греческого алфавита, являющаяся начальной в слове $\varepsilon\sigma\tau\iota$ (есть, быть).

Сидоров}[1], для второго множества – список номеров автомобилей: B = {00 – 01 МА, 00 – 02 МА, …}, для третьего множества – список слов, который, разумеется, окажется значительно короче книги, так как одно и то же слово в книге повторяется, как правило, несколько раз. Однако предложение "X есть множество слов некоторой книги" не задает множества, поскольку книга осталась неопределенной.

В математике важнейшим примером множества является множество натуральных чисел. При помощи натуральных чисел строятся другие числовые множества – множество $\mathbf{Z}$ целых чисел, множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел, множество $\mathbf{R}$ вещественных чисел и т. д., а на их основе развивается вся классическая математика. Строгому определению множества натуральных чисел, а также подробному анализу его свойств посвящена отдельная глава книги (глава 4). Сейчас же будем считать известным, что любое натуральное число может быть записано обычным образом с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 десятичной системы счисления, что мы умеем складывать и умножать натуральные числа, а также, имея два различных натуральных числа, определять, какое из них больше. Множество натуральных чисел обозначается символом $\mathbf{N}$[2]:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, ..., n, \ldots\}.$$

Здесь выписаны два первых натуральных числа 1 и 2, а также обозначено произвольное натуральное число $n > 2$. Первое многоточие означает, что после двойки мы можем выписать по возрастанию в естественном порядке последовательно и другие натуральные числа, а второе – что ряд натуральных чисел можно продолжить после любого числа n.

Таким образом, в общем случае запись $X = \{x, y, \ldots\}$ означает, что множество X состоит из элементов x, y и, возможно, некоторых других. Множество, в котором содержится только один элемент (пусть это будет элемент a), обозначается $\{a\}$.

После того как смысл понятия "множество" разъяснен, можно начинать построение *теории*: вводить новые понятия, также первичные или производные, изучать свойства этих понятий и связи между ними. Результаты проведенного изучения формулируются в виде теорем.

Как уже упоминалось, в математике каждое утверждение (теорема, лемма и т. д.) доказывается с помощью логических рассуждений. Мате-

---

[1] Считаем, что в рассматриваемой группе нет однофамильцев.

[2] В математической литературе заглавные латинские буквы **N**, **Z**, **Q**, **R**, обозначающие вышеперечисленные числовые множества, выделяются, как правило, жирным шрифтом. Тем самым эти обозначения отличаются от других, где эти же буквы, набранные обычным шрифтом, могут использоваться для обозначения других множеств (а также для обозначения точек, фигур и т. д.).

матическое доказательство есть цепочка простых утверждений, истинность которых выводится из первоначальных условий или уже доказанных фактов. При этом должны соблюдаться логические правила вывода, логические законы.

Каждое математическое утверждение имеет форму *высказывания*, т. е. осмысленного повествовательного предложения, которое должно удовлетворять следующим двум условиям.

1. Закон исключенного третьего. *Всякое высказывание является либо истинным* (*верным*), *либо ложным.*

2. Закон непротиворечивости. *Никакое высказывание не может быть и истинным и ложным одновременно.*

В силу первого из этих законов для любого высказывания третьего не дано, и утверждение, про которое невозможно однозначно ответить на вопрос, истинно оно или ложно, высказыванием не является и в математике не рассматривается. В силу второго закона, если некоторое предположение приводит к тому, что для данного утверждения можно сказать, что оно истинно и ложно одновременно, то возникает противоречие, и сделанное предположение неверно. На этом основан один из методов математических доказательств, а именно метод “*от противного*” (см. § 4).

Рассмотрим следующие предложения.

А. Минск – столица Республики Беларусь.

Б. Сейчас идет дождь.

В. $2 + 3 = 5$.

Г. $2 + 3 \neq 5$.

Д. $2 + 3 > 5$.

Е. $x > 2$.

Ж. Закройте дверь!

З. Идет ли дождь?

Предложения **А** – **Д** являются высказываниями, а **Е** – **З** нет.

Упражнение 1. *Объясните*, *почему никакое из предложений* **Е** – **З** *не является высказыванием*.

Упражнение 2. *Установите*, *истинны или ложны следующие высказывания.*

1. $515 \leq 516$.
2. $515 \leq 515$.
3. *Любые две прямые пространства лежат в одной плоскости.*
4. *Каковы бы ни были три прямые в пространстве*, *по крайней мере две из них лежат в одной плоскости.*
5. *Если сумма двух целых чисел делится* (*нацело*) *на* 2001 *и одно из них делится на* 9, *то второе делится на* 3.

Важно иметь в виду, что в случае, когда какое-то утверждение не считается высказыванием вследствие невозможности установить, истинно оно или ложно, речь идет о принципиальной невозможности. Это, конечно же, не означает простоты вопроса о том, истинно данное высказывание или ложно в случае, когда этот вопрос разрешим. Например, утверждение

И. *Число* $(126^{3728}+15^{15876})^{2387}+(111^{35933}-189^{1183})^{1914}+4$ *является простым числом*

есть высказывание. Принципиальная возможность проверить, простое это число или нет, заключается в том, что можно попытаться найти делители этого числа. Для этого нужно последовательно делить данное число на все натуральные числа, которые больше 2, но меньше, чем это число. Если хотя бы один раз возможно деление нацело, то утверждение **И** ложно, если же деление нацело невозможно ни разу, то утверждение **И** истинно. Ввиду огромной величины заданного числа предложенный процесс последовательного деления трудно реализуем. Разумеется, нельзя исключать другого, возможно более быстрого, способа установления простоты (или непростоты) данного числа.

В качестве еще одного примера такого типа рассмотрим так называемую ***последнюю теорему Ферма*** [1]:

Для любого натурального числа n, *большего двух*, *уравнение*

$$x^n + y^n = z^n \tag{2}$$

с тремя неизвестными x, y и z *не имеет решений в натуральных числах.*

Для доказательства этой теоремы, сформулированной Ферма в первой половине XVII в., математикам потребовалось более трехсот пятидесяти лет. Однако и до получения доказательства утверждение этой теоремы являлось высказыванием.

Исходя из имеющихся высказываний, можно получать другие высказывания посредством различных *логических операций* – способов построения новых высказываний. Основные логические операции описаны в § 4. Сейчас же мы определим одну из них, которая называется *отрицанием*.

Очевидно, что если **A** – некоторое высказывание, то предложение “*неверно*, *что* **A**” также является высказыванием. Оно называется ***отрицанием*** высказывания **A**. Отрицание высказывания **A** будем обозначать $\neg$**A** и читать “не **A**”. В силу сформулированных выше логических законов между высказыванием и его отрицанием имеется следующая связь: *отрицание истинного высказывания является ложным высказыванием*, *а отрицание ложного высказывания является истинным высказыванием.*

---

[1] Пьер Ферма (1601–1665) – французский математик. Последняя теорема Ферма была сформулирована примерно в 1630 г. Ее доказал английский математик Эндрю Уайлз в 1994 г.

Например, отрицание высказывания (1) можно сформулировать в виде “*a не* является элементом множества *A*”(“*a не* принадлежит множеству *A*”, “*a не* содержится в множестве *A*”, “множество *A не* содержит элемент *a*”). Это отрицание записывается в виде:

$$a \notin A.$$

Отрицанием высказывания **В**, выраженным в словесной форме, является высказывание

$\neg$**В** : “два плюс три не равно пяти”.

Упражнение 3. (i) *Является ли высказывание* **Д** *отрицанием высказывания* **В**?

(ii) *Найдите отрицание высказывания* **Д**.

Упражнение 4. *Сформулируйте отрицания следующих высказываний.*

1. *Множество прямых, не лежащих в двух данных перпендикулярных плоскостях, бесконечно.*
2. *Существует бесконечно много окружностей, имеющих только одну общую точку.*
3. *Нет цветов среди зимы.*
4. *Одна голова хорошо, а две лучше.*
5. *На всякого мудреца довольно простоты.*
6. *Без труда не вынешь и рыбку из пруда.*

Вернемся к приведенным выше примерам множеств. Первые три из них (*A*, *B*, *C*) обладают свойством, которого нет у четвертого (**N**). А именно в каждом из первых трех множеств содержится определенное число элементов. Такие множества относятся к *конечным множествам.*

Определение 1. *Множество X называется* ***конечным****, если существует натуральное число m такое, что в множестве X нет m элементов.*

Для множества X запись $|X| = n$ означает, что X – конечное множество, содержащее ровно n элементов. Другими словами, в множестве X есть n элементов, но нет $n + 1$ элементов. Расположив элементы этого множества в произвольном порядке, их можно пронумеровать:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*. Другими словами, определение бесконечного множества можно сформулировать следующим образом.

Определение 2. *Множество X называется* ***бесконечным****, если для каждого натурального числа n в X есть n элементов.*

Например, **N** – бесконечное множество.

По сравнению с приведенными выше примерами множеств труднее представить себе множество D песчинок на пляже или множество E молекул в стакане воды. Эти множества также конечны, но их практически невозможно задать в виде списков элементов из-за огромного количества элементов в каждом из них.

Можно привести примеры множеств, элементы которых не являются реально существующими объектами, а представляют собой некие идеальные объекты, абстракции. Примерами таких множеств служат множество F арифметических действий, множество G точек окружности, множество натуральных чисел $\mathbf{N}$. Как правило, множества именно такого типа изучает математика, оставляя множества, составленные из реальных объектов, для изучения другим наукам. Для того чтобы представлять себе множества, с которыми имеет дело математика, недостаточно органов зрения, осязания или других органов чувств человека, необходимы определенная мыслительная работа, способность к абстракции. Поскольку способность и привычка к абстрактному мышлению у разных людей различные, то каждый человек по-своему может представлять себе то или иное множество. Поэтому всякий раз, когда мы имеем дело с каким-либо конкретным множеством, мы должны его задать (описать) как можно более точно. Множество считается *заданным*, если составляющие его элементы описаны так, чтобы быть уверенным в том, что всякий, кто его рассматривает, имеет в виду один и тот же объект.

Если множество содержит небольшое количество элементов, то оно, как и в первых примерах, может быть задано перечислением элементов, например F = {сложение, умножение, вычитание, деление}. В противном случае используют другие способы задания множеств.

Самый распространенный способ – задание множества как *подмножества* (части) уже известного множества.

Определение 3. *Множество B называется* ***подмножеством*** *множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.*

Высказывание “B есть подмножество множества A” коротко записывается в виде

$$B \subseteq A. \tag{3}$$

Это же высказывание передается фразой: “множество A *включает* множество B”. Знак $\subseteq$ называется ***символом включения***. Из определения, очевидно, вытекает, что для произвольного множества A и для любого элемента $a \in A$ верны следующие высказывания:

$$A \subseteq A, \quad \{a\} \subseteq A.$$

Таким образом, *каждое множество является подмножеством самого себя*. Любое подмножество множества A, не совпадающее с самим A, называется ***собственным подмножеством*** множества A. Другими словами, множество B есть собственное подмножество множества A, если верны следующие высказывания: $B \subseteq A$ и $B \neq A$. Иногда для того чтобы подчеркнуть, что B есть собственное подмножество множества A, вместо символа $\subseteq$ используется символ $\subset$[1]. В качестве примеров собственных подмножеств приведем цепочку включений:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.$$

Как было указано выше, часто множество задается как подмножество данного множества. Например, можно говорить о множестве A_1 студентов вашей группы, родившихся в январе, о множестве B_1 автомобилей, номера которых относятся к серии МА, о множестве C_1 слов этой книги, в написании которых использованы две буквы “о” и т. д. Во всех этих примерах новое множество определяется как множество элементов данного множества, обладающих каким-либо дополнительным свойством по сравнению со свойством быть элементом исходного множества. Это дополнительное свойство называется ***характеристическим свойством*** определяемого подмножества. Так, для множества A_1 характеристическим свойством является свойство “быть рожденным в январе”. Коротко множество A_1 задается следующим образом:

$$A_1 = \{a \in A \mid a \text{ родился в январе}\}.$$

Аналогично в общем случае, если X – некоторое множество и P – некоторое свойство, то подмножество Y элементов множества X, для которого это свойство является характеристическим, записывается в виде

$$Y = \{x \in X \mid x \text{ обладает свойством } \mathsf{P}\}.$$

Тем самым множества B_1 и C_1 задаются следующим образом:

$$B_1 = \{b \in B \mid \text{номер } b \text{ относится к серии МА}\},$$
$$C_1 = \{c \in C \mid \text{запись слова } c \text{ содержит две буквы “о”}\}.$$

Два неудобства связаны с таким заданием множеств. Во-первых, характеристическое свойство, определяющее множество Y как часть множества X, может быть достаточно произвольным, и его задание не озна-

[1] Часто в математической литературе символ $\subset$ используется для обозначения произвольного подмножества. Разумеется, в таком случае символ $\subseteq$ в тексте не встречается.

чает, что для любого элемента x множества X мы *знаем*, обладает ли x указанным свойством, или, по крайней мере, *знаем*, *как* найти ответ на этот вопрос. Например, еще не обладая доказательством последней теоремы Ферма, можно было говорить о множестве

$$Y = \{n \in \mathbf{N} \mid \text{уравнение (2) имеет решение в натуральных числах}\}$$

как о части множества $\mathbf{N}$, заданной сформулированным выше характеристическим свойством. Элементами множества Y, очевидно, являются числа 1 и 2, так как $1^1 + 1^1 = 2^1$, $3^2 + 4^2 = 5^2$. Однако до получения доказательства теоремы Ферма мы для произвольного $n \in \mathbf{N}$ *не знали*, верно ли, что $n \in Y$, или не верно.

Этот пример показывает, что хотя характеристическое свойство и *определяет* подмножество (как часть исходного множества, состоящую из элементов, обладающих указанным свойством), однако это определение может оказаться “вещью в себе”, поскольку сказать об элементах определяемого подмножества что-либо еще, кроме уже сказанного, подчас не удается.

И второе неудобство. Обратимся вновь к последней теореме Ферма и рассмотрим множество

$$\mathbf{N}^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbf{N}\}$$

всех упорядоченных троек натуральных чисел. Для любого натурального числа n зададим следующее свойство P_n:

элемент $(a, b, c) \in \mathbf{N}^3$ *обладает свойством* P_n*, если он является решением уравнения* $x^n + y^n = z^n$.

Теорема Ферма утверждает, что при $n > 2$ свойство P_n не определяет никакого множества элементов из $\mathbf{N}^3$.

Еще один, более простой пример такого же рода. Будем говорить, что натуральное число m обладает свойством P, если m есть корень уравнения $4x^2 - 1 = 0$. Очевидно, что, как и в предыдущем примере, свойство P не определяет никакого множества чисел из $\mathbf{N}$.

Ниже мы увидим, какой выход находят математики в подобных ситуациях. Сейчас же отметим, что, несмотря на указанные недостатки, метод построения новых множеств по характеристическим свойствам является богатейшим источником многочисленных и разнообразных примеров множеств.

Однако столь широкое толкование понятия множества (по Кантору) и неопределенность в понимании того, что является характеристическим свойством, может приводить к противоречиям.

В качестве иллюстрации к сказанному рассмотрим два примера, принадлежащие Б. Расселу[1)].

1. Парадокс (антиномия)[2)] **брадобрея**

"Бреет ли сам себя цирюльник,
Бреющий всех,
Кто не бреется сам?"

Деревенский брадобрей повесил у входа в свой дом следующее объявление:

"*Брею тех и только тех, кто сам себя не бреет*". (4)

Однако через некоторое время ему пришлось снять это объявление, поскольку выяснилось, что обязательство, взятое на себя брадобреем, нельзя выполнить. В чем же состояла проблема брадобрея? С точки зрения теории множеств мы имеем множество X жителей деревни и характеристическое свойство, выделяющее в X ту часть Y жителей деревни, которые не бреются сами. Оставляя в стороне вырожденный случай, когда в деревне нет жителей, нуждающихся в бритье (считаем, что по крайней мере сам деревенский парикмахер в этом нуждается), зададим следующий вопрос: является ли брадобрей элементом множества Y? С одной стороны, принадлежа множеству X, он либо принадлежит множеству Y, либо нет, а с другой стороны, в любой из этих ситуаций он не может выполнить обещание, данное в объявлении. Действительно, пусть брадобрей не бреется сам (т. е. является элементом множества Y), тогда он должен себя брить. Но как только он начнет себя брить, он перестает быть элементом множества Y и себя брить не должен. Таким образом, множество Z тех жителей деревни, которых, согласно объявлению, должен брить брадобрей (множество, которое выделяется характеристическим свойством (4)), противоречиво.

2. Антиномия Рассела

Отправляясь от канторова толкования понятия множества, вполне правомерно рассматривать множество всех множеств, которое обозначим буквой M. Отметим, что поскольку M есть множество, то $\mathsf{M}\in\mathsf{M}$. Рассмотрим теперь следующее характеристическое свойство $\mathbf{P}$ для элементов множества M:

элемент $X\in\mathsf{M}$ *обладает свойством* $\mathbf{P}$ *тогда и только тогда, когда* $X\notin X$.

[1)] Бертран Рассел (1872–1970) – английский математик, философ, общественный деятель, лауреат Нобелевской премии по литературе (1950).

[2)] *Парадокс* (*антиномия*) – термины, имеющие греческие основы и обозначающие ситуацию, когда в теории доказываются два взаимно исключающих друг друга утверждения, каждое из которых выведено убедительными с точки зрения этой теории средствами.

Таким образом, множество X удовлетворяет свойству $\mathbf{P}$, если оно не является элементом самого себя (например, множество A студентов Вашей группы не является студентом). Такие множества можно условно назвать “обычными”. С другой стороны, множество M не удовлетворяет свойству $\mathbf{P}$, поскольку, как отмечено выше, $M \in M$. Множества этого типа, т. е. содержащие себя в качестве элемента, назовем “необычными”. Любой элемент множества M, т. е. любое множество, является либо “обычным” множеством, либо “необычным” множеством.

Пусть N – подмножество множества M, которое выделяется свойством $\mathbf{P}$, т. е. подмножество всех “обычных” множеств:

$$N = \{X \in M \mid X \notin X\}.$$

Попробуем установить, к какому типу множеств относится множество N.

Если N – “обычное” множество, то $N \notin N$, но это, по определению множества N, означает, что $N \in N$. Таким образом, предположение о том, что N – обычное множество, приводит к противоречию. Если N – “необычное” множество, то $N \in N$, но это, по определению множества N, означает, что $N \notin N$. Вновь пришли к противоречию.

Как показывают эти примеры, столь широкое толкование понятия множества, которое дается “определением” Кантора, может приводить к парадоксам и антиномиям. Чтобы избежать этого, в современной теории множеств (как и во многих разделах математики) принят ***аксиоматический метод*** построения теории. Суть метода в том, что *первичные понятия теории описываются посредством списка аксиом, связывающих эти понятия друг с другом*. Тем самым исключается возможность различных толкований этих понятий, поскольку никакими другими свойствами, кроме тех, которые предписываются аксиомами, первичные понятия не обладают. Как правило, аксиомы – это сравнительно небольшой набор утверждений, описывающих основные свойства первичных понятий, представляющихся нам интуитивно верными, и достаточных для построения содержательной теории.

Аксиоматика теории множеств необходима для раздела математики, занимающегося подтверждением “законности” положений теории, т. е. ее обоснованием. Этот раздел относится к математической логике и называется “Основания математики”. Другие разделы математики обходятся, как правило, без привлечения аксиоматики теории множеств (что не исключает, разумеется, аксиоматики, специфической для данного раздела), хотя большинство этих разделов основано на теоретико-множественных понятиях.

Имеется несколько систем аксиом теории множеств. Одна из наиболее употребительных – система аксиом Цермело – Френкеля[1] (далее обозначаемая коротко **ZF**), позволяющая избежать (внутри теории множеств, развиваемой на ее основе) всех известных в настоящее время парадоксов и антиномий. В курсе “Введение в математику”, который не сводится к теории множеств и предназначен для начинающих, мы не можем в полном объеме изложить аксиоматику теории множеств и поэтому в основном изложении придерживаемся канторова подхода (несколько “улучшенного”). Тем не менее наиболее значимые аксиоматические “вешки” будут расставлены. Там, где это представляется важным и уместным, мы будем подчеркивать отличия двух подходов, чтобы студент смог попытаться провести необходимые изменения для реализации аксиоматического метода[2].

Основные теоремы теории множеств бывают двух типов.

1. Теоремы, утверждающие, что *существует* множество с указанными свойствами (или *не существует* множества с указанными свойствами).

2. Теоремы, утверждающие, что *данное* множество обладает указанными свойствами (*данное* множество не обладает указанными свойствами).

При канторовом подходе, как правило, имеют дело с теоремами второго типа. Аксиоматический подход позволяет устанавливать и теоремы первого типа, приняв за истину, что некоторые множества (о которых сказано в аксиомах) существуют.

Следующая бытовая ситуация поясняет, почему мы в основном изложении прибегаем к канторову подходу.

Для успешной эксплуатации нового телевизора купивший его владелец может на первых порах, не читая инструкции (тем более, если она на незнакомом языке), использовать имеющийся опыт обращения с телевизорами, т. е. действовать в некоторой степени так, как подсказывает интуиция. При возникшей неисправности (“антиномии”) приходится следовать точной инструкции (“аксиомам”) либо обращаться к телевизионному мастеру (“специалисту в аксиоматической теории”). Точно так же при знакомстве с теорией множеств для понимания ее основных конструкций и теорем на первых порах канторов подход представляется вполне достаточным.

---

[1] Э. Цермело (1871–1953), А. А. Френкель (1891–1965) – немецкие математики.

[2] Полные изложения аксиоматической теории множеств имеются, например, в книгах: Френкель А. А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М., 1968; Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М., 1970.

§ 3. ПЕРВИЧНЫЕ ПОНЯТИЯ КАНТОРОВОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЦЕРМЕЛО – ФРЕНКЕЛЯ

Чтобы четко различать, с помощью какого из подходов излагается теория множеств в том или ином конкретном месте книги, следует разграничить исходные позиции, соответствующие этим подходам.

В канторовой[1)] теории множеств мы исходим из “определения” множества, приведенного в начале § 2, и “улучшаем” это определение в двух отношениях.

1. Пустое множество

Обратимся еще раз к отмеченной в предыдущем параграфе проблеме неопределенности, возникающей в некоторых случаях при попытке задания новых множеств с помощью характеристических свойств. Приведенные выше примеры показывают, что не всякое характеристическое свойство задает множество. Для того чтобы придать этому методу построения множеств универсальный характер, расширим наше понятие множества. Мы введем объект, который будет соответствовать всем характеристическим свойствам, не определяющим никакое множество в смысле определения Кантора. Условимся этот объект также называть множеством, а именно ***пустым множеством***, и обозначать символом $\varnothing$.

Всякий раз, когда указано некоторое свойство элементов множества А и ни один элемент из А не обладает этим свойством, будем говорить, что это свойство определяет пустое множество $\varnothing$ (*является характеристическим свойством пустого множества*).

Например, свойство P_n элементов множества $\mathbf{N}^3$, а также свойство P элементов множества $\mathbf{N}$, о которых шла речь в § 2, определяют пустое множество.

Из способа введения пустого множества вытекает, что этот объект не является множеством в смысле канторова определения, поскольку никакой элемент не является элементом пустого множества (пустое множество не содержит ни одного элемента). Тем не менее такое расширение понятия множества оказывается весьма удобным при изложении различных вариантов теории множеств.

Присоединив пустое множество к набору тех объектов, которые называются множествами, следует также пересмотреть понятие подмножества.

[1)] Иногда теория множеств, построенная по Кантору, называется “*наивной” теорией множеств*.

Будем считать, что пустое множество является подмножеством каждого множества

Другими словами, считаем, что для любого множества A истинно высказывание

$$\varnothing \subseteq A.$$

Множество всех подмножеств множества A называется ***множеством-степенью*** множества A или ***булеаном***[1)] множества A и обозначается символом $P(A)$. Таким образом, $P(A)$ – множество, элементами которого служат все подмножества множества A и только они. Например, если $A = \varnothing$, то единственное его подмножество совпадает с ним самим, т. е. $P(A) = \{\varnothing\}$, если $A = \{a\}$ – одноэлементное множество, то $P(A) = \{\varnothing, \{a\}\}$, если $A = \{a, b\}$, то $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, A\}$.

2. Универсальное множество

Введение пустого множества несколько расширяет канторово понятие множества. В этом пункте мы, наоборот, ограничим круг рассматриваемых множеств. В предыдущем параграфе отмечено, что допущение о существовании множества всех множеств приводит к противоречию. Чтобы избежать противоречий такого рода, будем считать, *что все множества, которые изначально рассматриваются в рамках какой-либо теории, являются подмножествами одного множества, называемого* ***универсальным множеством.***

На этой базе будем строить другие множества, используя понятие подмножества, а также *операции над множествами*, о чем речь пойдет ниже.

В каждом конкретном разделе математики есть свое универсальное множество, откуда берутся “изначальные” элементы. Например, в арифметике это множество **N** натуральных чисел, в математическом анализе – множество **R** вещественных чисел, в элементарной геометрии – множество точек пространства $\mathbf{E}^3$. Подчеркнем, что универсальное множество не является раз и навсегда заданным. Оно может изменяться, как правило, расширяясь в процессе развития теории. Развитие арифметики приводит к расширению множества натуральных чисел **N** сначала до множества целых чисел **Z**, далее до множества рациональных чисел **Q**, затем возникают их обобщения – *группы*, *кольца*, *поля.* Развитие математического анализа приводит к расширению множества вещественных чисел **R** до различных *функциональных пространств*, элементами которых явля-

---

[1)] Названо по имени Джорджа Буля (1815–1864) – английского математика, положившего начало применению математики в логике.

ются функции, обладающие теми или иными свойствами. В геометрии от трехмерного пространства $\mathbf{E}^3$ переходят к пространствам n измерений $\mathbf{E}^n$ для любого натурального числа n, а затем к их обобщениям – *n-мерным многообразиям*[1)].

Далее универсальное множество будет обозначаться буквой U. Как отмечалось выше, оно не одно и то же в различных ситуациях, однако в рассматриваемой нами "наивной" теории множеств важно лишь то, что оно есть.

Теперь рассмотрим начальные положения системы аксиом Цермело – Френкеля.

Первичными (неопределяемыми) понятиями этой системы являются *элементы*, *множества* и *отношение принадлежности*, которым установлено некоторое соответствие между элементами и множествами: *каждый элемент находится в соответствии* (*отношении принадлежности*) *с каким-либо множеством.* Связи между первичными понятиями описываются аксиомами. Конкретный же смысл ни элементов, ни множеств, ни отношения принадлежности не указывается. Вначале известно лишь то, что никакой элемент "не гуляет сам по себе", он "привязан" хотя бы к одному множеству отношением принадлежности.

Первоначально элементы будут обозначаться строчными латинскими буквами, а множества – прописными.

Если элемент a находится в отношении принадлежности с множеством B, то говорят, что "*a принадлежит B*" ("*a – элемент множества B*", "*a содержится в множестве B*", "*множество B содержит элемент a*") и пишут

$$a \in B. \tag{1}$$

Отрицание высказывания (1), т. е. высказывание $\neg(a \in B)$ (*a не принадлежит B*) записывается в виде

$$a \notin B.$$

Первым производным (т. е. определяемым) понятием в системе **ZF** является понятие подмножества.

Определение 1. *Пусть A и B – два множества. Множество B называется* ***подмножеством*** *множества A* (*обозначение* $B \subseteq A$), *если для любого* $a \in B$ *верно*, *что* $a \in A$. *Если при этом существует элемент b такой*,

[1)] Мы не даем определений названных здесь понятий. Они являются предметами изучения других математических курсов: алгебры, функционального анализа, топологии, дифференциальной геометрии, с которыми студенты познакомятся в свое время.

что $b \in A$, но $b \notin B$, то говорят, что B – ***собственное подмножество*** *множества A (обозначение $B \subset A$).*

Если B – подмножество множества A, то говорят также, что *B включается* в A или что B и A связаны *отношением включения*.

Замечание 1. Не следует путать отношение включения множеств с отношением принадлежности элемента множеству (как и соответствующие знаки $\subseteq$ и $\in$)[1]. Допустив здесь смешение понятий, можно прийти к выводу, что каждое множество является своим элементом. В аксиоматике **ZF** это исключается (см. § 2.8).

Определение 2. *Множество A называется* ***равным*** *множеству B (обозначение $A = B$), если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.*

Согласно этому определению, $A = B$, если каждое из двух множеств есть подмножество другого. В таком случае говорят, что A и *B состоят из одних и тех же элементов.* Определение 2 распространяется и на ту ситуацию, когда множество A вообще не содержит элементов – их не содержит и множество B.

Отношение включения множеств обладает основными свойствами, которые непосредственно следуют из определений.

Утверждение 1. *Для любых множеств A, B и C верны следующие высказывания*:

(i) $A \subseteq A$ (*рефлексивность*);

(ii) *если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$* (*транзитивность*);

(iii) *$A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$* (*антисимметричность*).

Из определения 2 не следует, вообще говоря, что равные множества совпадают. Ситуацию можно сравнить с той, которая возникает в элементарной геометрии при определении равных фигур. Так, если данный треугольник T_1 с помощью параллельного переноса на ненулевой вектор можно перевести в другой треугольник T_2, то треугольники T_1 и T_2 называются равными (хотя, разумеется, T_1 и T_2 не совпадают как множества точек плоскости). В теории множеств такая ситуация не допускается, каждое множество полностью определяется набором входящих в него элементов. Это гарантируется первой аксиомой **ZF** – аксиомой объемности.

ZF$_\mathbf{I}$ ***– аксиома объемности.*** *Равные (в смысле определения 2) множества совпадают.*

Таким образом, равенство $A = B$ для множеств A и B означает, что A и B – одно и то же множество. Согласно первой аксиоме, каждое множество определяется всеми содержащимися в нем элементами, или своим

---

[1] Впрочем, допуская вольность речи, иногда употребляют выражение “множество *B содержится* в множестве A” для высказывания $B \subseteq A$.

содержанием (*объемом*). Иначе говоря, невозможно существование более одного множества с одним и тем же содержанием.

Отметим следующие свойства отношения равенства.

Утверждение 2. *Для любых множеств* A, B *и* C *верны высказывания*:

(i) $A = A$ (*рефлексивность*);

(ii) *если* $A = B$, *то* $B = A$ (*симметричность*);

(iii) *если* $A = B$ *и* $B = C$, *то* $A = C$ (*транзитивность*).

Это утверждение, как и первое, легко вытекает из определений.

В системе **ZF** применительно к элементам термин “равенство” употребляется в следующем естественном смысле:

элемент a *равен элементу* b, *если* a *и* b *– один и тот же элемент, т. е. не существует двух не совпадающих равных элементов.*

Очевидно, что равенство элементов обладает теми же тремя свойствами (рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью), как и равенство множеств. Они называются *основными свойствами равенства* и далее будут неоднократно встречаться (см., например, § 8 и 9).

Отрицание равенства элементов $a = b$ записывается в виде $a \neq b$. То же для множеств.

Дальнейшие аксиомы **ZF** будем вводить постепенно, параллельно развитию канторовой теории множеств.

> Употребляйте с пользой время,
> Учиться надо по системе.
> Сперва хочу вам в долг вменить
> На курсы логики ходить.
> Ваш ум, нетронутый доныне,
> На них приучат к дисциплине,
> Чтоб взял он направленья ось,
> Не разбредаясь вкривь и вкось.
> Что вы привыкли делать дома
> Единым махом, наугад,
> Как люди пьют или едят,
> Вам расчленят на три приема
> И на субъект и предикат.
>
> *В. Гете*. Фауст.

§ 4. ОПЕРАЦИИ НАД ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ, ЛОГИЧЕСКИЕ СВЯЗКИ И КВАНТОРЫ

Выше уже упоминалось, что математические утверждения имеют форму *высказываний.* Высказывания и в целом математические теории всегда излагаются на каком-либо языке в виде математических текстов, к которым предъявляются специальные требования. Чтобы сформулировать эти требования, обратимся вначале к самому понятию высказывания.

Рассмотрим три текста:

"*Сократ – человек*",

"*Socrates is a man*",

"*Сократ – член человеческого сообщества*".

Все эти три различных текста передают одну и ту же информацию (в подобных случаях говорят, что "у них один и тот же смысл"). Информация, которую передает каждый из приведенных текстов, называется высказыванием, соответствующим тексту (или смыслом этого текста), а текст – передающим высказывание. Более точное определение состоит в том, что *текст, передающий математическое высказывание, есть осмысленное повествовательное предложение* (*в каком-либо языке*), *о котором* (*в пределах, по крайней мере, определенного контекста*) *можно говорить, истинно оно или ложно.*

Ради удобства речи, допуская некоторую ее вольность, часто высказыванием называют сам текст, передающий это высказывание.

При изложении той или иной математической теории постоянно следует иметь в виду проблему однозначного толкования читающими рассматриваемого текста (в настоящее время в круг читателей включаются и компьютеры). Тем самым, например, из числа математических должен быть исключен следующий текст:

"Он из Германии туманной
Привез учености плоды:
Вольнолюбивые мечты,
Дух пылкий и довольно странный,
Всегда восторженную речь
И кудри черные до плеч".

А. С. Пушкин. Евгений Онегин

В самом деле, этот текст не удовлетворяет условию однозначности прочтения, поскольку невозможно установить, привез ли Ленский учености плоды из "Германии туманной" или же из Германии он привез "туманной учености плоды". При этом не помогает и прочтение всего романа, т. е. смысл того, что имел в виду А. С. Пушкин в этом отрывке, не вытекает из контекста всего произведения. Неоднозначность толкования текста в поэзии, дающая простор воображению и являющаяся там достоинством, в математических текстах неприемлема.

В этой связи отметим также курьез, произошедший с названием романа Л. Н. Толстого “Война и мир”, показывающий, что подчас однозначность толкования текста может теряться из-за изменений правил грамматики в языке[1]. Первоначальное написание названия романа выглядело как “Война и миръ”, и толкование слова “миръ” как состояния, противоположного состоянию войны, вполне определяло смысл названия. В позапрошлом веке в русском языке наряду со словом “миръ” существовало слово “міръ”, которое передавало понятие космоса, вселенной, всего существующего. После реформы русского языка, произошедшей в прошлом столетии, эти два слова слились в одно и возникло слово-омоним (т. е. передающее более одного смысла) “мир”, что позволяет теперь неоднозначно толковать название “Война и мир”.

Сказанное выше дает только два примера тех опасностей неоднозначности понимания смысла, которые могут подстерегать нас при формулировке математических утверждений и изложении математических теорий в виде текстов на том или ином естественном языке. Во избежание этого математиками были построены искусственные или так называемые *формальные языки.* Тексты формального языка представляют собой комбинации исходных символов, образующиеся по строго описанным правилам (набор этих правил, как и в любом естественном языке, называется *синтаксисом* языка). Кроме того, в формальном языке имеются также строго описанные правила определения смысла текста, исключающие неоднозначность толкования (правила выявления смысла текста составляют *семантику* языка).

Конечно, использование формальных языков вместо естественных является кардинальным решением проблемы неоднозначности понимания смысла математического текста. Однако в курсе “Введение в математику” мы ограничиваемся лишь упоминанием о них по следующим причинам. Формальные языки, как и аксиоматическая теория множеств, относятся к основаниям математики, и другие разделы математики, как правило, излагаются без использования формальных языков. Формальные языки трудны для начинающих изучать математику, поскольку представляют собой сложную математическую теорию, для ее понимания необходим достаточно высокий уровень математической подготовки[2]. Не формализуясь полностью (хотя в принципе это возможно), тек-

---

[1] Конечно, выражение “Война и мир” не является высказыванием, однако ситуация, описанная ниже, вполне применима и к высказываниям.

[2] С формальными языками достаточно подготовленный читатель может ознакомиться по книгам: Черч А. Введение в математическую логику. М., 1960; Коэн П. Теория множеств и континуум-гипотеза. М., 1969.

сты классической математики излагаются на том или ином естественном языке. Тем не менее существует ряд правил и обозначений, которым следуют современные математические тексты, их строгость не оспаривается математиками.

При написании математического текста приходится использовать различные грамматические приемы и формы. В связи с этим для нас особенно важными будут два следующих соображения.

А. Из простых предложений можно составлять сложносочиненные и сложноподчиненные.

Б. Предложение обычно содержит главные члены: подлежащее и сказуемое, которые во избежание неоднозначности толкования должны подвергаться скрупулезному анализу.

Рассмотрим вначале, каким образом в математических текстах используется первая из указанных грамматических конструкций.

А. Логические связки

Идея построения новых высказываний из более простых с помощью сложных предложений реализуется следующими логическими операциями: *конъюнкцией*, *дизъюнкцией, импликацией, эквивалентностью*, к которым добавляется еще операция *отрицания* (о ней вкратце уже упоминалось в § 2). Напомним, что, помимо повествовательности передающего высказывание текста, неотъемлемым свойством является его истинность (или ложность). Логические операции обладают тем свойством, что истинность или ложность построенного с их помощью высказывания однозначно определяется по "истинностным" значениям входящих в них высказываний. Для указания истинности или ложности сложного высказывания в зависимости от истинности или ложности исходных высказываний будем пользоваться *таблицами истинности*, где истинность высказывания обозначается буквой И, а ложность – буквой Л. Кроме того, ниже для краткости (если это не будет приводить к недоразумению) часто вместо выражения "повествовательное предложение, передающее высказывание" мы будем писать коротко "высказывание".

Описание основных логических операций предварим для полноты напоминанием (см. § 2) операции отрицания.

1. Отрицание

Пусть **А** – высказывание. Высказывание "*неверно, что* **А**" называется ***отрицанием*** высказывания **А** (отрицание **А** обозначается $\neg$**А**), а переход от высказывания **А** к его отрицанию $\neg$**А** называется ***операцией отрицания***. Таблица истинности для отрицания такова:

A	$\neg$A
И	Л
Л	И

Примеры и упражнения, касающиеся операции отрицания, приведены в § 2.

2. Конъюнкция

Конъюнкция[1] – это логическая операция, сопоставляющая двум высказываниям **A** и **B** высказывание, передающееся сложносочиненным предложением, в котором высказывания **A** и **B** соединяются союзом “и”: **A** и **B**. Конъюнкция высказываний **A** и **B** обозначается $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$[2] и является истинным высказыванием, если и только если оба высказывания **A** и **B** истинны. Это означает, что конъюнкция имеет следующую таблицу истинности.

A	B	$\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$
И	И	И
Л	И	Л
И	Л	Л
Л	Л	Л

Например, пусть **A** есть высказывание “число 3 больше 1”, а **B** – “число 3 меньше 2”. Тогда конъюнкция $\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$ есть высказывание “число 3 больше 1 и меньше 2”, которое, разумеется, ложно.

3. Дизъюнкция

Дизъюнкция[3] – это логическая операция, сопоставляющая двум высказываниям **A** и **B** высказывание, передающееся сложносочиненным предложением, в котором высказывания **A** и **B** соединяются союзом “или”: **A** или **B**. Дизъюнкция высказываний **A** и **B** обозначается $\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$ и является истинным высказыванием, если и только если хотя бы одно из высказываний **A** и **B** истинно. Это означает, что дизъюнкция имеет следующую таблицу истинности.

A	B	$\mathbf{A}\vee\mathbf{B}$
И	И	И
Л	И	И
И	Л	И
Л	Л	Л

[1] От латинского *conjunctio* – союз, связь, соединение.

[2] Конъюнкция высказываний **A** и **B** обозначается также **A** & **B**

[3] От латинского *disjunctio* – разобщение.

Например, если **A** и **B** – те же высказывания о числе 3, что и выше, то дизъюнкция $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ есть высказывание “число 3 больше 1 или меньше 2”, которое, в отличие от предыдущего примера, истинно.

Чтобы не усложнять чтение, вне этого параграфа в книге не используются специальные значки $\vee$ и $\wedge$ для обозначения дизъюнкции и конъюнкции. Они заменяются союзами “или” и “и”. Однако следует иметь в виду, что каждый раз, когда высказывания связаны этими союзами, точный смысл получающегося высказывания дается приведенными здесь определениями.

Отметим, что в русском языке союз “или” употребляется в двух смыслах: разделительном и соединительном. В первом случае выражение “**A** или **B**” означает, что утверждается одно и только одно из **A** и **B**. В этом случае говорят, что имеется *альтернатива*[1]: истинность одного из высказываний исключает истинность другого. Во втором (соединительном) смысле при использовании союза “или” утверждается хотя бы одно из **A** и **B**. Именно в этом, соединительном смысле, и употребляется союз “или” в определении дизъюнкции. В дальнейшем во избежание двусмысленности вместо союза “или” в разделительном смысле мы будем употреблять союз “либо”.

Упражнение 1. *Постройте таблицу истинности для высказывания* “**A** *либо* **B**”.

4. Импликация

Пусть **A** и **B** – пара высказываний. ***Импликацией***[2] **A** и **B** называется переход от пары высказываний **A** и **B** к высказыванию, которое в текстовом виде передается выражением: “*если* **A**, *то* **B**”, т. е. “*всегда, когда истинно* **A**, *истинно* **B**”. Импликация обозначается двойной стрелкой “$\Rightarrow$”:

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}\,. \tag{1}$$

Подчеркнем, что запись $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ есть некоторый текст, который передает высказывание, полученное в результате применения операции импликации к высказываниям **A** и **B**. Часто это высказывание само называется *импликацией* **A** и **B**. Импликация (1) может быть выражена также другими словами: “*Пусть* **A**. *Тогда* **B**”. Высказывание **A** при этом называется ***посылкой***, а высказывание **B** – ***заключением***.

Что касается таблицы истинности для импликации, то здесь ситуация не совсем тривиальная. Конечно, представляется очевидным, что выска-

---

[1] От латинского *alter* – один из двух.

[2] От латинских: *implicatio* – сплетение, переплетение; *implico* – тесно связываю.

зывание (1) ложно всякий раз, когда посылка **A** истинна, а заключение **B** ложно. С другой стороны, в обычной речи при образовании импликации мы привыкли, что между посылкой и заключением существует связь (обычно причинная). Например, таковыми являются импликации: “*если водитель нажимает на тормоз, то машина останавливается*”, “*если наступает ночь, то на небе появляется солнце*”. В подобных случаях, как правило, не возникает проблем с определением того, истинна или ложна построенная импликация. Однако поскольку между посылкой и заключением не всегда имеется связь, то что, например, можно сказать об истинности импликаций в следующих случаях:

(i) *Если* 2 < 3, *то П. И. Чайковский – русский композитор*;

(ii) *Если Софокл – автор “Илиады”, то Рембрандт – фламандский живописец*;

(iii) *Если квадратный трехчлен имеет три различных корня, то Дон Кихот – победитель Ганнибала*?

В математике, для того чтобы иметь возможность строить импликацию для любых высказываний **A** и **B**, полагают, что **A** $\Rightarrow$ **B** имеет следующую истинностную таблицу:

A	**B**	**A** $\Rightarrow$ **B**
И	И	И
Л	И	И
И	Л	Л
Л	Л	И

Упражнение 2. *Установите, истинны или ложны импликации* (i) – (iii).

Если импликация (1) есть истинное высказывание, то говорят, что из утверждения **A** ***следует*** утверждение **B**. Это же самое можно выразить другими словами:

а) **B** есть ***необходимое*** условие для **A**;

б) **A** есть ***достаточное*** условие для **B**;

в) **A** ***влечет*** **B**.

Если же импликация (1) есть ложное высказывание, то говорят, что из **A** ***не следует*** **B** и пишут

$$\mathbf{A} \not\Rightarrow \mathbf{B}. \qquad (2)$$

Согласно вышесказанному, высказывание (2) истинно только в ситуации, когда **A** истинно, а **B** ложно.

Упражнение 3. *Пусть* $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ *– истинное высказывание. Выясните, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны* (*напомним, отрицание произвольного высказывания* **A** *обозначается* $\neg\mathbf{A}$):

1. $\neg\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$,
2. $\mathbf{A} \Rightarrow \neg\mathbf{B}$,
3. $\neg\mathbf{A} \Rightarrow \neg\mathbf{B}$,
4. $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$,
5. $\neg\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$,
6. $\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$,
7. $\neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$.

Упражнение 4. *Пусть* $T_1 = A_1B_1C_1$ *и* $T_2 = A_2B_2C_2$ *– два треугольника, у которых равны длины двух пар сторон*: $|A_1B_1| = |A_2B_2|$, $|C_1B_1| = |C_2B_2|$. *Пусть, далее,* α_1 *и* α_2 *– величины углов* B_1 *и* B_2 *соответственно. Рассмотрим при сделанных предположениях два высказывания:*

A. $\alpha_1 > \alpha_2$,

B. *площадь треугольника* T_1 *больше площади треугольника* T_2.

Сформулируйте импликацию $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$, *а также импликации* 1–7 *из упражнения* 3 *и выясните, какие из них являются истинными, а какие – ложными.*

Упражнение 5. *Является ли необходимым* (*достаточным*) *условием:*

– отсутствие четных делителей у целого числа для простоты этого числа?

– четность одного из двух целых чисел и делимость на 3 *другого для делимости их произведения на* 6?

– равноудаленность точек множества S *пространства* $\mathbf{E}^3$ *от некоторой фиксированной точки для того, чтобы* S *было окружностью*?

– положительность дискриминанта для существования корня у квадратного трехчлена с действительными коэффициентами?

– совпадение двух пар действительных чисел для совпадения их среднего арифметического (*среднего геометрического*)?

Подавляющая часть математических теорем может быть записана в форме импликации. Например, теорема Пифагора[1)] есть импликация:

“*если* a, b *– длины катетов, а* c *– длина гипотенузы некоторого прямоугольного треугольника, то* $c^2 = a^2 + b^2$”.

Доказательство теорем такого типа представляет собой доказательство того, что импликация, сформулированная в теореме, верна, т. е. что при истинной посылке заключение также истинно.

Довольно часто при доказательстве истинности импликации $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ нужный результат получается как цепочка истинных импликаций вида

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_1 \Rightarrow \mathbf{A}_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}_n \Rightarrow \mathbf{B}.$$

[1)] Пифагор (VI в. до н. э.) – древнегреческий математик.

Тем самым неочевидный, как правило, переход **A** $\Rightarrow$ **B** заменяется конечной последовательностью более простых шагов. При этом используется свойство импликации, которое называется ***транзитивностью***: *если из* **A** *следует* **B** *и из* **B** *следует* **C**, *то из* **A** *следует* **C**. С помощью формул свойство транзитивности импликации записывается следующим образом:

$$((\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \text{ и } (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C})) \Rightarrow (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C}). \tag{3}$$

Утверждение 1. *Импликация обладает свойством транзитивности.*

Доказательство. Требуется доказать истинность импликации (3). Пусть обе импликации **A** $\Rightarrow$ **B** и **B** $\Rightarrow$ **C** истинны и **A** – истинное высказывание. Тогда, так как импликация **A** $\Rightarrow$ **B** истинна, то **B** – также истинное высказывание. А поскольку импликация **B** $\Rightarrow$ **C** истинна, то из того, что **B** – истинное высказывание, следует, что **C** также является истинным. Таким образом, при условии, что **A** истинное высказывание, а **A** $\Rightarrow$ **B** и **B** $\Rightarrow$ **C** – истинные импликации, доказано, что **A** $\Rightarrow$ **C** – истинное высказывание. Это и означает транзитивность импликации.

Следующее простое утверждение является иллюстрацией сказанного выше.

Утверждение 2. *Для любых множеств A, B и C верно следующее высказывание: если A – подмножество множества B и B – подмножество множества C, то A – подмножество множества C.*

Доказательство. Требуется доказать, что для любых множеств A, B и C истинна следующая импликация:

$$(A \subseteq B \text{ и } B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C). \tag{4}$$

Для множеств A и B условие $A \subseteq B$ означает, что для каждого элемента x истинна импликация: $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$. Если теперь для произвольного элемента x определить три высказывания:

$$\mathbf{A}.\ x \in A, \quad \mathbf{B}.\ x \in B \text{ и } \mathbf{C}.\ x \in C,$$

то импликация (4) становится частным случаем формулы (3), истинность которой доказана в утверждении 1.

Таким образом, доказательство утверждения 2 представляет собой цепочку истинных импликаций, состоящую из двух шагов:

$$(x \in A) \Rightarrow (x \in B) \text{ и } (x \in B) \Rightarrow (x \in C)$$

(при условии, что $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$).

Одним из распространенных способов доказательства истинности импликации **A** $\Rightarrow$ **B** с истинной посылкой **A** является так называемый “***метод от противного***”. Такое доказательство обычно начинается словами: “*Допустим, что данная импликация ложна*”. При принятом допущении стремятся доказать, что высказывание **A** (или некоторое другое, являющееся следствием высказывания **A**, и поэтому также истинное) является ложным. Если это удается сделать, то в итоге получается: высказывание **A** (или его следствие) является одновременно истинным и ложным, что недопустимо по закону непротиворечивости (§ 2). Это означает, что сделанное допущение неверно, и из закона исключенного третьего (§ 2) следует истинность рассматриваемой импликации.

В качестве иллюстрации метода “от противного” рассмотрим доказательство теоремы Евклида о бесконечности множества простых чисел.

Напомним, что множество натуральных чисел, больших, чем 1, делится на две непересекающиеся части – множество простых чисел и множество составных чисел. Число n называется *простым*, если оно имеет только два делителя: 1 и n. Число, не являющееся простым, называется *составным*. Сформулируем теорему Евклида в следующей форме:

пусть M – множество всех простых чисел, тогда M – бесконечное множество.

Доказательство от противного. Допустим, что множество M является конечным:

$$M = \{p_1, p_2, ..., p_k\}.$$

К произведению всех простых чисел добавим 1:

$$p_1 p_2 \dots p_k + 1 = n.$$

Полученное число n больше каждого из простых чисел и поэтому является составным. Каждое составное число делится на какое-либо простое, так что n делится на какое-то p_i. Но тогда и 1 делится на p_i, так как $1 = n - p_1 p_2 \dots p_k$. Последнее неверно, значит, множество M не есть множество всех простых чисел. Полученное противоречие доказывает теорему.

Упражнение 6. *Докажите методом от противного следующие утверждения:*

– множество людей, прочитавших роман И. А. Гончарова “Обрыв”, конечно и число элементов в нем больше единицы;

– из семи последовательных натуральных чисел по крайней мере одно кратно пяти;

– множество натуральных чисел, выражающих число сторон правильных многоугольников, бесконечно (*существуют правильные многоугольники со сколь угодно большим числом сторон*);

– не существует двух различных окружностей, имеющих хотя бы три общие точки;

– множество точек пересечения параболы и окружности содержит не более четырех элементов.

Если в импликации **A** $\Rightarrow$ **B** поменять местами посылку и заключение, то получающаяся импликация **B** $\Rightarrow$ **A** называется утверждением, ***обратным*** к импликации **A** $\Rightarrow$ **B**. В таком случае исходная импликация **A** $\Rightarrow$ **B** называется ***прямым*** утверждением. Например, для теоремы Пифагора обратное утверждение формулируется следующим образом:

Если a, b, c *– три положительных числа, и* $c^2 = a^2 + b^2$, *то существует прямоугольный треугольник, для которого* a, b *– длины катетов,* c *– длина гипотенузы.*

Это обратное утверждение также верно.

Упражнение 7. *Докажите теорему Пифагора и обратную к теореме Пифагора методом от противного.*

В рассмотренном примере и прямая и обратная импликации истинны. Однако это не всегда так, т. е. в общем случае из истинности импликации не следует истинность обратной импликации:

$$(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \not\Rightarrow (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}). \quad (5)$$

Действительно, рассмотрим истинную импликацию: “*если* n *и* m *– четные натуральные числа, то* $n + m$ *– четное натуральное число*”. Обратное утверждение, которое формулируется следующим образом: “*если* n *и* m *– натуральные числа и* $n + m$ *– четное число, то* n *и* m *– четные числа*”, разумеется, неверно. Этот пример доказывает формулу (5).

5. Эквивалентность

Определение 1*. Высказывание* **A** *называется* ***эквивалентным*** *высказыванию* **B***, если из* **A** *следует* **B** *и из* **B** *следует* **A**. *Операция сопоставления паре высказываний* **A** и **B** *высказывания* “**A** *эквивалентно* **B**” *называется* ***эквивалентностью****.*

Для обозначения эквивалентности используется логический символ в виде стрелки, направленной в обе стороны: **A** $\Leftrightarrow$ **B**. Итак, **A** $\Leftrightarrow$ **B** означает:

$$(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \text{ и } (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}).$$

Из определения вытекает, что эквивалентность имеет следующую таблицу истинности:

A	**B**	**A⇔B**
И	И	И
Л	И	Л
И	Л	Л
Л	Л	И

Примером эквивалентных высказываний могут служить посылка и заключение в теореме Пифагора.

Тот факт, что высказывание **A** эквивалентно высказыванию **B**, выражают также в форме следующих высказываний:

а) **A *равносильно* B**;

б) **A *есть необходимое и достаточное условие для* B**;

в) **A *верно тогда и только тогда, когда верно* B**.

Утверждение 3. *Эквивалентность транзитивна, т. е. истинна следующая импликация*:

$$((\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}) \text{ и } (\mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{C})) \Rightarrow (\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{C}).$$

Справедливость этого утверждения вытекает из свойства транзитивности импликации (утверждение 1).

Утверждение 4. $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A})$.

Доказательство. Согласно утверждению 3, достаточно показать, что обе импликации истинны или ложны одновременно. Пусть импликация $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ истинна. Допустим, что импликация $\neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$ ложна. Это означает, что $\neg\mathbf{B}$ истинное высказывание, а $\neg\mathbf{A}$ ложное. По закону исключенного третьего получаем, что **A** истинное, а **B** ложное высказывания. Возникает противоречие с условием, что $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ истинно. Значит, наше допущение неверно, импликация $\neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$ истинна. Пусть теперь импликация $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ ложна. Это означает, что **A** истинно, а **B** ложно. В таком случае $\neg\mathbf{B}$ истинно, а $\neg\mathbf{A}$ ложно, т. е. импликация $\neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$ ложна. Итак, импликации $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ и $\neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$ истинны или ложны одновременно, утверждение доказано.

Отметим, что суть доказательства истинности импликации методом “от противного” заключается в том, что импликация $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ заменяется импликацией $\neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A}$. Это возможно, поскольку, как только что доказано, указанные импликации эквивалентны.

Значительная часть теорем в математике имеет форму эквивалентности. К ним относятся некоторые теоремы о признаках делимости натуральных чисел. Например, хорошо известен следующий *признак делимости на пять: натуральное число n делится на пять тогда и только тогда, когда десятичная запись числа n оканчивается пятеркой или нулем.*

Упражнение 8. *Докажите справедливость следующего утверждения*: *пусть ABC – треугольник, D – точка на прямой AC. Тогда*

$\dfrac{|AD|}{|CD|} = \dfrac{|AB|}{|CB|} \Leftrightarrow$ *D есть основание биссектрисы внутреннего либо внешнего угла B треугольника ABC.*

Определенные выше логические операции (как и обозначающие их знаки $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\wedge, \vee$) обычно называют *логическими,* или *пропозициональными связками*. С помощью логических связок можно из простых высказываний строить более сложные. Если в построении нового высказывания участвуют более двух исходных высказываний, надо указывать последовательность применения связывающих их логических операций. С этой целью обычно применяются скобки, которые используются так же, как в школьной математике при указании порядка выполнения алгебраических действий. Например, если **A**, **B**, **C** – какие-то высказывания, то запись

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}$$

не выражает высказывания, поскольку не прочитывается однозначно. Действительно, поставив по-разному скобки, мы получим два высказывания:

$$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} \quad \text{и} \quad \mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}). \tag{6}$$

Упражнение 9. *Покажите, что существует такая тройка высказываний* **A**, **B** и **C**, *для которой одно из высказываний* (6) *истинно, а другое – ложно.*

Относительно операции отрицания $\neg$ условимся, что если за знаком $\neg$ стоит высказывание, выраженное буквой, то отрицание относится к этому высказыванию, а если после знака $\neg$ открывается скобка, то отрицание относится ко всему высказыванию, заключенному в скобки.

Важную роль в логике играют выражения, построенные подобно выражениям (6), и являются истинными высказываниями при любых значениях входящих в них высказываний (выражения (6) таковыми не являются). Такие выражения называются *тавтологиями*[1] или *логическими законами*. Более точно, ***логическим законом*** (***тавтологией***) называется выражение, содержащее буквы **A**, **B**, **C**, ..., знаки логических операций и скобки, которое:

– во-первых, “правильно построено”, т. е. является высказыванием, если считать, что буквы **A**, **B**, **C**, … обозначают какие-то высказывания;

– во-вторых, высказывание, получающееся при подстановках вместо **A**, **B**, **C**, ... любых высказываний, истинно.

Приведем примеры наиболее важных логических законов.

1. $\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{A}$ (***закон исключенного третьего***);
2. $\neg(\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{A})$ (***закон непротиворечивости***)[2];

---

[1] От греческих слов: *tauto* – то же самое; *logos* – слово.

[2] Иногда этот закон называется также *законом противоречия.*

3. $\neg(\neg \mathbf{A}) \Leftrightarrow \mathbf{A}$ (***закон двойного отрицания***);

4. $(\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathbf{B} \Rightarrow \neg\mathbf{A})$ (***закон обращения***, ***или контрапозиции***);

5. $(\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})) \Leftrightarrow (\neg\mathbf{A} \wedge \neg\mathbf{B})$;

6. $(\neg(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})) \Leftrightarrow (\neg\mathbf{A} \vee \neg\mathbf{B})$ (***законы двойственности***, ***или де Моргана***[3]);

7. $((\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C})) \Rightarrow (\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{C})$ (***закон транзитивности импликации***);

8. $((\neg\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}) \wedge (\neg\mathbf{A} \Rightarrow \neg\mathbf{B})) \Rightarrow \mathbf{A}$.

Последний закон выражает сущность доказательства от противного (*reductio ad absurdum* (лат.)) истинности высказывания **A**. Действительно, если предположить противное, т. е. истинность отрицания $\neg\mathbf{A}$, и вывести из этого предположения некоторое высказывание **B** и его отрицание $\neg\mathbf{B}$, то получится противоречие. Это противоречие означает, что сделанное предположение (о ложности **A**) неверно, т. е. **A** истинно.

Упражнение 10. *С помощью таблиц истинности убедитесь, что формулы* 1–7 *действительно являются логическими законами, т. е. для любых значений* (*истинных или ложных*) *высказываний* **A**, **B** *и* **C** *высказывания* 1–7 *истинны.*

Отметим, что некоторые из этих законов уже встречались ранее в этой книге: первых два логических закона – в самом начале второго параграфа – формулировались как требования, которым должно удовлетворять любое математическое высказывание; транзитивность импликации и закон обращения доказывались выше в этом параграфе (утверждения 3 и 4 соответственно).

Теперь обратимся к другому грамматическому аспекту, важному при чтении и составлении математических текстов, а именно к анализу конструкции предложения, передающего математическое высказывание.

Б. Субъекты, предикаты и кванторы

До сих пор мы обсуждали, как с помощью нескольких высказываний строить новые. Обратимся теперь к анализу их простейшей внутренней структуры. Отметим, что предметом рассмотрения логики вообще (и математической в частности) являются ***понятия***. Понятия бывают *единичные* и *общие.* ***Единичное понятие*** – это просто имя какого-либо предмета или явления. Имя необходимо для фиксирования нашего внимания на конкретном предмете или явлении (в логике обычно говорят о ***субъекте***). Субъекты различаются набором своих ***свойств***. Всякое высказывание передает информацию о свойстве субъекта (или нескольких субъектов). В логике эти свойства называются ***предикатами***. Поскольку мы

[3] Огастес де Морган (1806–1871) – шотландский математик.

условились, что высказывания передаются осмысленными повествовательными предложениями, то допуская некоторую вольность, можно сказать, что всякое высказывание передает следующую информацию: *субъект* (подлежащее) обладает *свойством – предикатом* (выраженным сказуемым).

Попробуем теперь понять, как формируются в логике ***общие понятия***.

Предположим, что у нас имеется ряд высказываний с различными субъектами, но одинаковым предикатом. Например:

1. *Иванов любит ловить рыбу.*
2. *Петров любит ловить рыбу.*
3. *Сидоров любит ловить рыбу.*

Рассмотрим выражение (формальный текст):

$$x \text{ любит ловить рыбу.} \tag{A}$$

Этот текст нельзя считать высказыванием, поскольку без объяснения того, что означает x, тексту (А) нельзя придать разумный смысл. С другой стороны, если вместо x подставлять какие-либо имена, то в результате будут получаться высказывания. Здесь мы впервые встречаемся с понятием *высказывательной формы*. То обстоятельство, что с помощью подстановки вместо x имен различных субъектов можно получать различные осмысленные тексты, позволяет нам называть x (логической) ***переменной***. Высказывательная форма обладает еще тем свойством, что не все высказывания, возникающие при подстановках, вообще говоря, истинны. Например, подстановка в (А) вместо x имени какого-нибудь обитателя пустыни приводит к ложному высказыванию. Таким образом выделяется совокупность субъектов, для которых полученные высказывания истинны. Будем теперь рассматривать всю эту совокупность как новый субъект и дадим ему имя: “*любитель рыбной ловли*”.

Так возникло новое понятие (общее). Всякое общее понятие по ***содержанию*** определяется указанием совокупности свойств (предикатов) подпадающих под него субъектов. В нашем примере содержанием понятия “любитель рыбной ловли” является свойство “*любить ловить рыбу*”. Совокупность субъектов, обладающих этим (характеристическим) свойством, образует ***объем понятия*** (вспомните аксиому объемности!).

Упражнение 11. *Придумайте несколько примеров общих понятий, применяя предыдущую схему. Определите их объем и содержание.*

Рассмотрим еще один пример высказывательной формы:

$$x > y. \tag{B}$$

Считая x и y вещественными числами, мы придаем тексту (В) смысл: некоторое число x больше некоторого числа y. Подставляя в (В) вместо букв x и y конкретные числа, мы всякий раз будем получать высказывания, например: $3 > 2$, $5 > 4$, $1 > \sqrt{5}$ и т. д.

Сформулируем теперь общее понятие высказывательной формы. *Формальный текст* – это конечная последовательность записанных в определенном порядке букв различных алфавитов и специальных знаков, например, $=$, $+$, $\in$, $\neq$.

Определение 2. Высказывательной формой *называется формальный текст, в котором выделены буквы, например, x, y, z, ..., превращающийся в высказывание после замены выделенных букв именами некоторых субъектов*[1]*. Выделенные буквы x, y, z, … называются* ***логическими переменными****.*

Обычное обозначение для высказывательных форм – $\mathsf{P}(x)$, $\mathsf{P}(x, y)$, $\mathsf{P}(x, y, z)$, $\mathsf{P}(x_1, x_2, ..., x_n)$ и т. д.

Примерами высказывательных форм, помимо выражений (A) и (B), могут служить следующие выражения:

(i) x – четное число; (iii) $x^2 - 3x + 2 > 0$;
(ii) $\sin^2 xyz + \cos^2 xyz = 1$; (iv) $x \geq y$.

При рассмотрении высказывательных форм важно указывать на то, подстановка каких имен допускается. В самом деле, в примере (i) – это целые числа, в каждом из остальных вместо x, y, z можно подставлять любые вещественные числа, но нельзя комплексные (почему ?).

Всюду ниже предполагается, что высказывательная форма $\mathsf{P}(x)$ задается вместе с некоторым множеством A, которое является *областью изменения* переменной. Это означает, что подстановка имени любого элемента a из A в высказывательную форму вместо x приводит к высказыванию (истинному либо ложному). В таком случае говорят также, что высказывательная форма *определена на множестве A.*

Всякой высказывательной форме $\mathsf{P}(x)$ однозначно соответствует ее область истинности – совокупность тех значений a переменной x, для которых соответствующее высказывание $\mathsf{P}(a)$ (получаемое подстановкой вместо x значения a) истинно. Обычное обозначение для такой совокупности:

$$\{x \mid \mathsf{P}(x)\}, \text{ или } \{x \in A \mid \mathsf{P}(x)\}.$$

Часто наряду с формой $\mathsf{P}(x)$ используется высказывательная форма

$$(\neg\mathsf{P})(x),$$

[1] Требуется, чтобы при каждой такой замене одна и та же переменная, несколько раз встречающаяся в тексте, заменялась именем одного и того же субъекта.

которая возникает следующим образом: *область истинности* $(\neg \mathbf{P})(x)$ *совпадает с множеством тех* a, *для которых* $\mathbf{P}(a)$ *ложно*.

Здесь уместно определить две логические операции, которые по высказывательным формам строят высказывания, характеризующие их области истинности. Такие операции называются ***кванторами***[1].

Квантор всеобщности ($\forall$[2]).

Это логическая операция, сопоставляющая высказывательной форме $\mathbf{P}(x)$ высказывание, обозначаемое

$$\forall\ x \in A\ \ \mathbf{P}(x)$$

и означающее, что область истинности формы $\mathbf{P}(x)$ совпадает с областью A изменения переменной x.

Квантор существования ($\exists$[3]).

Это логическая операция, сопоставляющая высказывательной форме $\mathbf{P}(x)$ высказывание, обозначаемое

$$\exists\ x \in A\ \ \mathbf{P}(x)$$

и означающее, что область истинности формы $\mathbf{P}(x)$ непуста.

Кванторы, помимо их общей важности в логике, дают возможность превращать обычные тексты в формальные. Это позволяет избегать многих ошибок при исследовании смысла текста, а также приводит к более компактной и удобной записи.

Рассмотрим некоторые примеры.

Обычные тексты:

(1) *"для любого элемента x множества A справедливо высказывание* $\mathbf{P}(x)$ (здесь, конечно, имеется в виду истинность всех $\mathbf{P}(a)$ для произвольного a из области значений переменной);

(2) *"любая точка, лежащая на серединном перпендикуляре к данному отрезку, равноудалена от концов отрезка"*;

(3) "*каждое натуральное число n больше числа* $(n-10)^2$";

(4) *"в множестве A существует такой элемент a, что* $\mathbf{P}(a)$ *– истинное высказывание"*;

(5) "*если* $A \not\subset B$, *то существует элемент* $x \in A$ *такой, что* $x \notin B$".

Кванторные интерпретации:

(1′) $\forall\ x \in A\ \ \mathbf{P}(x)$;

---

[1] Высказывания, возникающие в результате применения кванторов, обычно описывают область истинности "количественно", что объясняет терминологию: *quantity* (англ.) – количество.

[2] Перевернутая первая буква английского слова *Any* – каждый, любой.

[3] Перевернутая первая буква английского слова *Exist* – существовать.

($2'$) *если* Δ *– серединный перпендикуляр к отрезку* AB, *то*

$$\forall\ M\in\Delta\quad d(M, A) = d(M, B).$$

(Знак $d(A, B)$ будем употреблять для обозначения расстояния от точки A до точки B). В этом примере A есть множество точек прямой Δ, вместо x мы пишем M и роль формы $\mathsf{P}(x)$ играет равенство $d(M, A) = d(M, B)$;

($3'$) $\forall\ n\in\mathbf{N}\quad n > (n-10)^2$;

($4'$) $\exists\ x\in A\quad \mathsf{P}(x)$;

($5'$) $(A\not\subset B) \Rightarrow (\exists\ x\in A\quad x\notin B)$.

Сделаем еще два замечания об употреблении определенных выше кванторов.

Прежде всего отметим, что при формулировке отрицаний высказываний, построенных с помощью кванторов всеобщности и существования, эти кванторы заменяются один на другой. А именно, очевидно, что отрицанием высказывания (1) является следующее высказывание: “существует элемент x множества A, для которого $\mathsf{P}(x)$ ложно”:

$$\neg(\forall\ x\in A\quad \mathsf{P}(x)) \quad\Leftrightarrow\quad (\exists\ x\in A\quad \neg\mathsf{P}(x)).$$

И наоборот, отрицанием утверждения (4) является высказывание: “для каждого элемента x множества A утверждение P(x) ложно”:

$$\neg(\exists\ x\in A\quad \mathsf{P}(x)) \quad\Leftrightarrow\quad (\forall\ x\in A\quad \neg\mathsf{P}(x)).$$

Второе замечание заключается в том, что при формулировке утверждений, в которых кванторы всеобщности и существования следуют друг за другом, важен порядок следования. Обратимся к примеру истинного высказывания:

Для каждого натурального числа n *существует натуральное число* m, *большее, чем* n: $\forall\ n\in\mathbf{N}\quad \exists\ m\in\mathbf{N}\quad m > n$.

Если поменять местами порядок следования кванторов, то получим следующее высказывание, которое, разумеется, ложно:

Существует натуральное число m, *большее каждого натурального числа* n: $\exists\ m\in\mathbf{N}\quad \forall\ n\in\mathbf{N}\quad m > n$.

Отметим, что в математической литературе используется также запись $\exists!$, которая заменяет слова: “*существует единственный*”. Например, высказывание “*для любой пары различных точек* A *и* B *пространства* $\mathbf{E}^3$ *существует единственная прямая* ∇, *проходящая через* A *и* B” может быть записано с использованием кванторов следующим образом:

$$\forall\quad A, B\in\mathbf{E}^3,\ A\neq B\quad \exists!\nabla,\ \nabla - \text{прямая},\ A, B\in\nabla.$$

В заключение этого параграфа еще раз обратимся к понятию предиката – свойству элементов некоторого множества. Пусть $\mathsf{P}(x)$ – высказывательная форма и A – множество, элементы которого берутся в качестве значений переменной. Например, $\mathbf{P}(x)$ – уже знакомый нам текст

“*x любит ловить рыбу*”

и A – множество всех жителей Нижнего Новгорода. Опустим во взятом тексте обозначение переменной (x):

“*… любит ловить рыбу*”.

Мы получили определение некоторого свойства жителей Нижнего Новгорода – предиката на множестве A. Обозначим этот предикат буквой $\mathbf{P}$. Одни из жителей Нижнего Новгорода обладают этим свойством, а другие – нет. Область истинности высказывательной формы $\mathbf{P}(x)$ назовем областью истинности предиката $\mathbf{P}$. Здесь предикат выступает в роли характеристического свойства подмножества $\{x \in A \mid \mathbf{P}(x)\}$, т. е. своей области истинности.

С другой стороны, всякое свойство-предикат элементов некоторого множества может быть записано в виде высказывательной формы. Действительно, все субъекты различаются свойствами; в частности, всякое свойство $\mathbf{P}$ определяется совокупностью имен субъектов, ему удовлетворяющих: для всякого такого имени a высказывание “a обладает свойством $\mathbf{P}$” истинно. Тем самым задается высказывательная форма $\mathbf{P}(x)$, для которой $\mathbf{P}(a)$ означает: a обладает свойством $\mathbf{P}$.

Таким образом, высказывательные формы являются выражением предикатов в виде текстов. Учитывая эту связь, в дальнейшем для выражения различных свойств мы будем использовать высказывательные формы.

§ 5. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Рассмотрим метод *математической индукции*, широко применяемый для доказательства математических утверждений, связанных с натуральными числами. Пусть требуется доказать некое утверждение $\mathbf{P}(n)$, касающееся произвольного натурального числа n. Другими словами, требуется доказать, что область истинности некоторой высказывательной формы $\mathbf{P}(n)$, определенной на множестве $\mathbf{N}$ натуральных чисел, совпадает с $\mathbf{N}$. Схема доказательства следующая.

1-*й этап*. Доказываем, что $\mathbf{P}(1)$ истинно.

2-й *этап*. Доказываем следующее утверждение: *для каждого натурального числа* $n > 1$ *истинна следующая импликация*:

$$(\mathbf{P}(n-1) \textit{ истинно}) \Rightarrow (\mathbf{P}(n) \textit{ истинно}).$$

Заключение. $\mathbf{P}(n)$ *истинно для любого натурального* n.

Описанный метод доказательств называется *доказательством индукцией по n.* Правомерность применения метода математической индукции обсуждается в § 4.3. Смысл этого метода можно объяснить следующим образом.

Первый этап называется *базой индукции.* При этом создается основа, начало индукции. Учитывая, что $\mathbf{P}(1)$ истинно, на основе утверждения, доказанного на втором этапе, заключаем, что истинно $\mathbf{P}(2)$. Затем, вновь используя второй этап, получаем, что $\mathbf{P}(3)$ также истинно и т. д. Тот факт, что истинность утверждения $\mathbf{P}(n)$ сохраняется при переходе от n к $n + 1$, позволяет утверждать, что $\mathbf{P}(n)$ истинно для любого $n \in \mathbf{N}$.

Не всегда метод математической индукции начинается с $n = 1$. Если на первом этапе для фиксированного натурального числа m доказана истинность утверждения $\mathbf{P}(m)$, а на втором этапе считается, что $k > m$, тогда заключение следующее: $\mathbf{P}(n)$ *истинно для каждого* $n \geq m$.

Для иллюстрации метода найдем число подмножеств конечного множества X, т. е. число элементов в множестве $P(X)$.

Итак, пусть $|X| = n$, т. е. множество X содержит ровно n элементов. Обозначим через $f(n)$ число подмножеств множества X, $f(n) = |P(X)|$. Если $n = 1$, т. е. $X = \{a\}$ – одноэлементное множество, то $P(X) = \{\varnothing, \{a\}\}$ – двухэлементное множество, т. е. $f(1) = 2$. Пусть далее $n > 1$. Зафиксируем какой-либо элемент a множества X. Любое подмножество множества X либо не содержит элемент a, либо содержит a. Поскольку подмножества первого типа не включают один фиксированный элемент множества X, то их количество совпадает с числом подмножеств $(n - 1)$-элементного множества, т. е. с числом $f(n - 1)$. Заметим, что подмножеств первого типа ровно столько же, сколько подмножеств второго типа, т. е. содержащих a. Действительно, если добавить к каждому множеству первого типа элемент a, то получатся все подмножества второго типа, причем попарно различные. Это означает, что

$$f(n) = 2\,f(n - 1) \qquad (1)$$

для любого натурального $n > 1$. Учитывая, что $f(1) = 2$, получаем, что $f(2) = 2 \cdot 2 = 4$, $f(3) = 2 \cdot 4 = 8$, … . Эти вычисления подсказывают гипотезу:

$$f(n) = 2^n, \quad n = 1, 2, \ldots . \qquad (2)$$

Равенство (2) доказываем по индукции. Предположим, что формула (2) верна при $n = k$, т. е. $f(k) = 2^k$. Тогда ввиду равенства (1) получаем, что $f(k + 1) = 2^{k+1}$, т. е. формула (2) верна при $n = k + 1$. Теперь делаем вывод, что равенство (2) верно для всех $n \in \mathbf{N}$.

Отметим в заключение, что если $X = \varnothing$, то $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$ и $|P(\varnothing)| = 1$. Поскольку $|\varnothing| = 0$, то формула (2) верна и при $n = 0$.

Итак, n-элементное множество содержит 2^n подмножеств, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если X – конечное множество и $|X| = n$, то $|P(X)| = 2^n$.*

Упражнение 1. *Методом математической индукции докажите справедливость следующих утверждений.*

(i) *n различных точек прямой ($n \in \mathbf{N}$) разбивают ее на $n + 1$ частей.*

(ii) $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1)$ *для любого* $n \in \mathbf{N}$.

(iii) *Пусть a и b – целые числа такие, что их разность $a - b$ делится на натуральное число m. Тогда для любого $n \in \mathbf{N}$ разность $a^n - b^n$ также делится на число m.*

(iv) *Пусть X – конечное множество, состоящее из n элементов, $n > 5$. Тогда число двухэлементных подмножеств множества X превышает число одноэлементных подмножеств множества X более чем в 2 раза.*

§ 6. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

В этом параграфе определяются операции объединения, пересечения, вычитания, а также декартова умножения множеств, позволяющие, исходя из заданных множеств, строить новые множества по некоторым естественным правилам. Вопрос о существовании этих множеств в рамках аксиоматики **ZF** мы отложим до следующего параграфа. Это позволит читателю вначале получить некоторые навыки в работе с важными теоретико-множественными конструкциями, а затем на этой основе, имея возможность сравнивать, познакомиться с аксиоматическим подходом к введенным конструкциям.

1. Объединение множеств

Определение 1. *Пусть A и B – два множества.* ***Объединением*** *множества A и множества B называется множество $A \cup B$, элементами которого являются каждый элемент множества A, равно как и каждый элемент множества B и только они.*

Определение 1 коротко может быть записано в виде следующей эквивалентности:

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ или } x \in B.$$

Например, если A – множество студентов Вашей группы, которые изучают английский язык, B – множество студентов группы, которые изучают немецкий язык, то $A \cup B$ – это множество студентов группы, которые изучают английский язык или немецкий язык. Разумеется, студент, который изучает оба языка, также является элементом множества $A \bigcup B$.

Для наглядного представления операции объединения (и последующих операций) полезны графические образы. В качестве рассматриваемых множеств можно взять множества точек каких-либо простых фигур на плоскости. На рис. 1 множества A и B изображены в виде двух кругов и показано их объединение $A \bigcup B$.

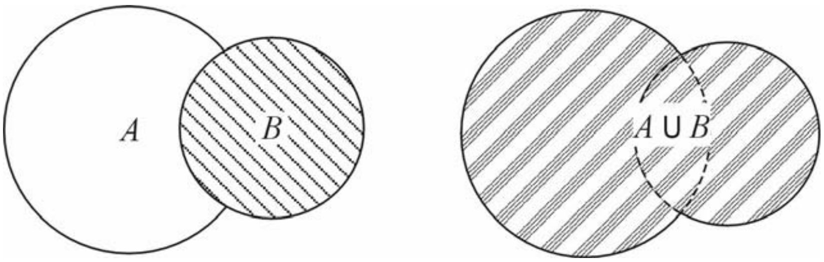

Рис. 1

Для любых множеств A, B и C справедливы следующие утверждения:

1. $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$ (свойство ***ассоциативности***, или ***сочетательности***, объединения).

2. $A \bigcup B = B \bigcup A$ (свойство ***коммутативности***, или ***перестановочности***, объединения).

3. $A \bigcup A = A$ (свойство ***идемпотентности*** объединения).

4. $A \subseteq A \bigcup B$.

5. $A \bigcup \varnothing = A$.

6. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \bigcup B = B$.

7. $A \bigcup B = \varnothing \Leftrightarrow (A = \varnothing$ и $B = \varnothing)$.

Свойство ассоциативности несложно доказать. Действительно, обе части нужного равенства есть объединения двух пар множеств: левая – A и $B \bigcup C$, а правая – $A \bigcup B$ и C. Требуется доказать, что эти объединения совпадают. Рассмотрим следующую цепочку эквивалентностей:

$$[x \in A \bigcup (B \bigcup C)] \Leftrightarrow [(x \in A) \text{ или } (x \in B \bigcup C)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(x \in A), \text{ или } [(x \in B), \text{ или } (x \in C)]\,] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(x \in A), \text{ или } (x \in B), \text{ или } (x \in C)].$$

В этой цепочке первых два символа эквивалентности поставлены по определению объединения, а последний – исходя из смысла союза “или”. Союз “или” используется в книге (как было отмечено в § 4) в неразделяющем смысле, т. е. истинность утверждения, записанного слева от союза “или” не исключает верности утверждения, записанного справа от него. Проведенное рассуждение показывает, что элемент x принадлежит множеству $A\bigcup(B\bigcup C)$ тогда и только тогда, когда x принадлежит хотя бы одному из множеств A, B, C. Аналогичное рассуждение показывает, что точно такое же условие определяет произвольный элемент множества $(A\bigcup B)\bigcup C$. Следовательно, эти множества совпадают, ассоциативность объединения доказана.

Оставшиеся свойства 2–7 также легко следуют из определения.

Упражнение 1. *Докажите свойства* 2–7.

Теперь для каждого натурального числа $n \geq 3$ определим индуктивно *объединение* ***n*** *множеств.*

Определение 2. $A_1\bigcup A_2\bigcup \ldots\bigcup A_n = (A_1\bigcup A_2\bigcup \ldots\bigcup A_{n-1}) \bigcup A_n.$ (1)

Согласно формуле (1),

$$A_1\bigcup A_2\bigcup A_3 = (A_1\bigcup A_2)\bigcup A_3,$$
$$A_1\bigcup A_2\bigcup A_3\bigcup A_4 = (A_1\bigcup A_2\bigcup A_3)\bigcup A_4 = ((A_1\bigcup A_2)\bigcup A_3)\bigcup A_4,$$
$$\ldots,$$
$$A_1\bigcup A_2\bigcup \ldots \bigcup A_n = (\ldots((A_1\bigcup A_2)\bigcup A_3)\ldots \bigcup A_{n-1})\bigcup A_n.$$

Тем самым объединение n множеств сводится к нескольким объединениям двух множеств; $n-1$ операций объединения, которые обозначены $n-1$ символами $\bigcup$ в левой части последней формулы, выполняются последовательно в том порядке, в котором эти значки записаны, т. е. слева направо.

Теорема 1. *Множество* $A_1\bigcup A_2\bigcup \ldots \bigcup A_n$ *совпадает с множеством всех элементов, каждый из которых принадлежит какому-либо из множеств* $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Доказательство. Требуется доказать следующую эквивалентность:

$$x\in A_1\bigcup A_2\bigcup \ldots \bigcup A_n \Leftrightarrow (x\in A_1, \text{ или } x\in A_2, \ldots, \text{ или } x\in A_n). \qquad (2)$$

Применим индукцию по n. При $n = 2$ утверждение верно, поскольку оно превращается в определение 1. Возьмем $k \geq 3$ и предположим, что (2) верно при $n = k-1$. Далее имеем, согласно определению 2:

$$x\in A_1\bigcup A_2\bigcup \ldots \bigcup A_k \Leftrightarrow (x\in B\bigcup A_k, \text{ где } B = A_1\bigcup A_2\bigcup \ldots \bigcup A_{k-1}). \qquad (3)$$

По нашему предположению,

$$x\in B \Leftrightarrow (x\in A_1, \text{ или } x\in A_2, \ldots, \text{ или } x\in A_{k-1}). \qquad (4)$$

Объединяя (3) и (4), получаем

$$x\in A_1\bigcup A_2\bigcup \ldots \bigcup A_k \Leftrightarrow (x\in A_1, \text{ или } x\in A_2, \ldots, \text{ или } x\in A_{k-1}, \text{ или } x\in A_k).$$

Доказано, что если утверждение (2) верно при $n = k - 1$, то оно верно и при $n = k$. Тем самым эквивалентность (2), т. е. теорема 1, доказана для каждого $n \geq 3$.

Из теоремы очевидно вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 1. *В объединении n множеств $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n$ можно как угодно изменять порядок объединяемых множеств и группировать эти множества; все множества, получающиеся в результате таких объединений, будут совпадать.*

Теорема 1 подсказывает, как можно определить объединение не только конечного, а и произвольного набора множеств. Вначале введем понятие *семейства*[1].

Под ***семейством*** множеств $(A_i)_{i \in I}$ понимается произвольный набор множеств A_i, в котором каждое множество снабжено *индексом* i, дополнительно выделяющим это множество, т. е. выполняющим ту же роль, для которой использовались номера 1, 2, …, n в вышеизложенном тексте. Множество I – это множество всех используемых индексов. Эти индексы попарно различны и приписаны множествам, составляющим набор (*членам* семейства), с той целью, чтобы эти члены можно было попарно различать.

Например, можно говорить о семействе числовых множеств $(m\mathbf{N})_{m \in \mathbf{N}}$, где $m\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел, которые делятся (нацело) на натуральное число m. Или о семействе $(\Delta_p)_{p \in \mathrm{E}^2}$, где Δ_p – горизонтальная прямая на плоскости $\mathbf{E}^2$, проходящая через произвольную точку p этой плоскости (прямая Δ_p здесь рассматривается как множество составляющих ее точек). Как видно из второго примера, понятие “семейство” отличается от понятия “множество” тем, что два множества семейства A_i и A_j, имеющие различные индексы ($i \neq j$), могут быть равными, в отличие от двух различных элементов множества, которые совпадать не могут.

Определение 3. Объединением семейства множеств $(A_i)_{i \in I}$ *называется множество, содержащее каждый элемент множества A_i, для любого $i \in I$, и не содержащее никаких других элементов.*

Объединение семейства множеств обозначается знаком $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$. С помощью формул определение 3 записывается следующим образом:

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \;\Leftrightarrow\; \exists\; i \in I, \text{ что } x \in A_i.$$

---

[1] Определение понятия семейства дано в § 2.1.

Возвращаясь к примерам семейств, приведенных выше, отметим, что

$$\bigcup_{m \in \mathrm{N}} m\mathrm{N} = \mathbf{N}, \qquad \bigcup_{p \in \mathbf{E}^2} \Delta_p = \mathbf{E}^2.$$

В таких случаях говорят, что семейство $(m\mathbf{N})_{m\in\mathbf{N}}$ есть *покрытие* множества $\mathbf{N}$, а семейство $(\Delta_p)_{p\in\mathbf{E}^2}$ есть *покрытие* плоскости $\mathbf{E}^2$.

В общем случае понятие покрытия определяется следующим образом.

Определение 4. *Пусть A – какое-то множество, являющееся подмножеством универсального множества U.* ***Покрытием*** *множества A называется любое семейство $(A_i)_{i\in I}$ подмножеств множества U такое, что $A \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.*

Разумеется, если речь идет о покрытии универсального множества U, то включение превращается в равенство: $U = \bigcup_{i\in I} A_i$. Именно такая ситуация имеет место в приведенных выше примерах.

Упражнение 2. *Найдите следующие объединения:*

(i) $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} [\frac{1}{1+n}; n]$;

(ii) $\bigcup_p p\mathbf{N}$, *где* $p\mathbf{N}$, *как и выше, обозначает множество всех натуральных чисел, кратных числу p, а объединение берется по всем простым числам p;*

(iii) $\bigcup_{1<r<2} S^1(O,r)$, *где O – фиксированная точка плоскости, а $S^1(O, r)$ обозначает окружность радиуса r с центром в точке O.*

Упражнение 3. *Пусть* $\mathbf{Z}$ *– множество всех целых чисел; z – произвольное целое число; A_z – множество всех действительных чисел вида $z + x$; x – произвольное иррациональное число. Опишите множество* $\bigcup_{z\in\mathbf{Z}} A_z$.

2. Пересечение множеств

Определение 5. *Пусть A и B – два множества.* ***Пересечением*** *множества A и множества B называется множество $A \cap B$, содержащее каждый элемент, принадлежащий одновременно множеству A и множеству B, и не содержащее других элементов.*

Коротко это определение может быть записано в виде:

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ и } x \in B. \tag{5}$$

Например, если A и B – множества студентов группы, изучающих английский и немецкий языки соответственно, то $A \cap B$ – это множество студентов этой группы, каждый из которых изучает оба языка.

Упражнение 4. *Найдите пересечения $A \cap B$:*

(i) *A – куб, B – сфера, вписанная в этот куб (описанная около куба);*

(ii) *$A = n\mathbf{Z}$, $B = m\mathbf{Z}$, где n и m – два натуральных числа, $n\mathbf{Z}$ и $m\mathbf{Z}$ – множества целых чисел, кратных числам n и m соответственно.*

На рис. 2 показана графическая интерпретация пересечения $A \cap B$ множеств A и B.

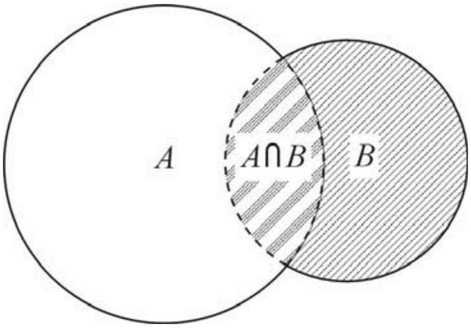

Рис. 2

Для любых множеств A, B и C верны следующие утверждения.

1. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (свойство ***ассоциативности*** пересечения).
2. $A \cap B = B \cap A$ (свойство ***коммутативности*** пересечения).
3. $A \cap A = A$ (свойство ***идемпотентности*** пересечения).
4. $A \cap B \subseteq A$.
5. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Так же, как в случае объединения, остановимся на свойстве ассоциативности пересечения. Не приводя точных формулировок и доказательств, аналогичных тем, которые были сделаны для операции объединения, отметим следующее.

Во-первых, для доказательства равенства 1 достаточно заметить, что множества, записанные слева и справа в этой формуле, совпадают, потому что они состоят из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно всем множествам A, B и C.

Во-вторых, можно использовать запись $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, это множество корректно определено, оно состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно каждому множеству A_i, $1 \le i \le n$:

$$x \in A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \Leftrightarrow \forall\ i \in \{1, \ldots, n\} \quad x \in A_i.$$

Как и в случае операции объединения, последнее замечание подсказывает определение пересечения произвольного семейства множеств.

Определение 6. Пересечением семейства множеств $(A_i)_{i\in I}$ *называется множество, содержащее каждый элемент, принадлежащий одновременно всем множествам* A_i, $i\in I$, *и не содержащее других элементов.*

Это определение с помощью формул записывается следующим образом:

$$x\in \bigcap_{i\in I} A_i \;\Leftrightarrow\; \forall\ i\in I\ \ x\in A_i.$$

Упражнение 5. *Найдите следующие пересечения*:

(i) $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} (-\frac{1}{n}; n)$;

(ii) $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n$, *где* A_n *– множество натуральных чисел, кратных числу* 2^n;

(iii) $\bigcap\limits_{i\in I} \pi_i$, *где* $(\pi_i)_{i\in I}$ *– некоторое семейство плоскостей, проходящих через фиксированную точку* p *пространства* $\mathbf{E}^3$.

При чередовании операций объединения и пересечения можно пользоваться свойствами ***дистрибутивности*** одной операции относительно другой:

$A\bigcup(B\bigcap C) = (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$,

$A\bigcap(B\bigcup C) = (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$.

Упражнение 6. *Докажите свойства дистрибутивности операций объединения и пересечения.*

Формально определения 1 и 5 объединения и пересечения отличаются только союзами "или" и "и", соединяющими условия $x\in A$ и $x\in B$. Это означает, что объединение двух множеств определяется с помощью дизъюнкции, а пересечение – с помощью конъюнкции. Тот факт, что элемент x принадлежит объединению $A\bigcup B$ (пересечению $A\bigcap B$) множеств A и B, есть дизъюнкция (конъюнкция) двух условий $x\in A$ и $x\in B$.

С операциями объединения и пересечения связано важное понятие разбиения множества.

Определение 7. Разбиением *множества* A *называется покрытие* $(A_i)_{i\in I}$ *множества* A, *состоящее из попарно непересекающихся непустых подмножеств множества* A.

Другими словами, семейство $(A_i)_{i\in I}$ есть *разбиение* множества A, если выполняются три условия:

1. $\forall\ i \in I\ \ A_i \neq \varnothing$;
2. $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = A$;
3. Если $i, j \in I$ и $i \neq j$, то $A_i \bigcap A_j = \varnothing$.

Сами множества A_i, составляющие разбиение, называются ***классами*** этого разбиения.

Например, если $S^1(O, r)$ – окружность на плоскости $\mathbf{E}^2$ с центром в точке O и радиусом r, то семейство $(S^1(O, r))_{r\geq 0}$ есть разбиение плоскости $\mathbf{E}^2$ (считаем, что окружность нулевого радиуса совпадает с точкой O).

Замечание 1. Поскольку множества, входящие в разбиение $(A_i)_{i\in I}$, попарно различные, то в этом случае семейство $(A_i)_{i\in I}$ можно не отличать от множества $\{A_i\}_{i\in I}$, составленного из элементов разбиения. Поэтому будем считать, что два разбиения $(A_i)_{i\in I}$ и $(B_j)_{j\in J}$ одного и того же множества A *совпадают*, если совпадают множества $\{A_i\}_{i\in I}$ и $\{B_j\}_{j\in J}$, составленные из элементов этих разбиений (способ индексации элементов разбиения для нас не важен).

Замечание 2. Иногда объединение и пересечение множеств называются соответственно *суммой* и *произведением* множеств. Такая терминология объясняется значительным совпадением свойств операций над множествами и обычных операций сложения и умножения чисел. Так же как для объединения и пересечения множеств, в арифметике для сложения и умножения чисел выполняются законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Пустое множество при этом играет роль нуля (0) в арифметике, а универсальное множество U относительно пересечения множеств играет роль единицы (1) при умножении чисел. Однако следует иметь в виду, что аналогия между арифметикой множеств и арифметикой чисел не является полной. Так, например, в отличие от множеств, для чисел не выполняются законы идемпотентности (неверно, что $n + n = n$ и $n \cdot n = n$ для произвольного натурального числа n); $n + 1$ не совпадает с 1 в отличие от равенства $A \bigcup U = U$; имеются и другие различия.

3. Разность множеств

Определение 8. *Пусть A и B – два множества.* ***Разностью*** *множества A и множества B называется множество $A \setminus B$, содержащее каж-*

дый элемент, который принадлежит множеству A, но не принадлежит множеству B, и не содержащее других элементов

Коротко это определение может быть записано в виде:

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ и } x \notin B. \tag{6}$$

Например, если A и B – множества студентов группы, изучающих английский и немецкий языки соответственно, то $A \setminus B$ – это множество тех студентов группы, которые изучают английский язык, но не изучают немецкий язык.

На рис. 3 показана графическая интерпретация разности $A \setminus B$.

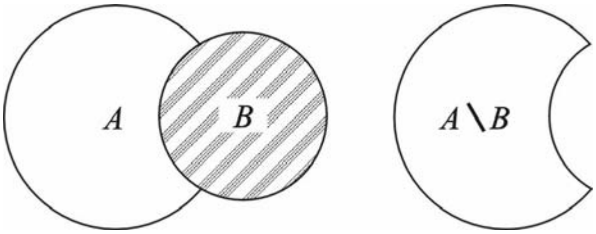

Рис. 3

Отметим некоторые свойства разности, справедливые для любых множеств A, B, C.

1. $A \setminus B \subseteq A$.
2. $A \setminus A = \varnothing$, $A \setminus \varnothing = A$, $\varnothing \setminus A = \varnothing$.
3. $A \setminus B = \varnothing \iff A \subseteq B$.
4. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
5. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Первые три свойства непосредственно следуют из определения. Свойства 4 и 5 называются ***свойствами двойственности***. Приведем доказательство первого из них:

$$[x \in A \setminus (B \cap C)] \iff [x \in A \text{ и } x \notin B \cap C] \iff [[x \in A \text{ и } x \notin B] \text{ или } [x \in A \text{ и } x \notin C]] \iff [x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)].$$

Здесь первый и третий знаки эквивалентности поставлены в соответствие с определениями разности и объединения, а второй знак (представляющий основной момент доказательства) – в силу следующего простого соображения: элемент x не является общим элементом множеств B и C тогда и только тогда, когда он не принадлежит хотя бы одному из этих множеств.

Упражнение 7. *Докажите справедливость формулы* 5.

Отметим, что одной из причин введения пустого множества является то, что при его отсутствии операции пересечения и разности множеств не всегда были бы выполнимы.

4. Дополнение множества

Определение 9. *Для любого множества A (являющегося подмножеством универсального множества U) разность $U \setminus A$ называется* ***дополнением*** *множества A и обозначается A^c*[1].

Например, если π – некоторая плоскость, то дополнение π^c есть множество точек двух полупространств, на которые плоскость π делит пространство.

При графической иллюстрации универсальное множество представляется обычно прямоугольником на плоскости, а рассматриваемые множества – кругами, лежащими внутри этого прямоугольника (рис. 4).

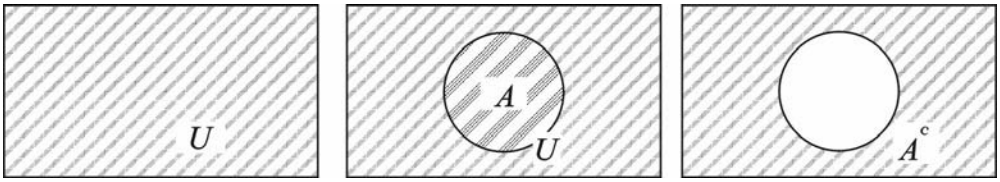

Рис. 4

Отметим следующие свойства дополнения, верные для любых подмножеств A и B универсального множества U:

1. $\varnothing^c = U, \quad U^c = \varnothing$.
2. $A \bigcup A^c = U, \quad A \bigcap A^c = \varnothing$.
3. $(A^c)^c = A$.
4. $(A \bigcup B)^c = A^c \bigcap B^c$.
5. $(A \bigcap B)^c = A^c \bigcup B^c$.

Первые два свойства очевидно вытекают из определения. Третье свойство доказывается на основе закона исключенного третьего. Действительно, если A – некоторое множество, то для любого элемента $x \in U$ верно одно и только одно из двух утверждений: либо $x \in A$, либо $x \notin A$.

---

[1] Точнее, дополнение следовало бы обозначать $(A^c)_U$, поскольку роль универсального множества могут играть в разных случаях различные множества. Однако, как правило, из контекста ясно, о каком именно универсальном множестве идет речь, если это неважно, то значок U опускают. Для обозначения дополнения множества A используются также символы $\overline{A}$ и CA.

Другими словами, для любого $x \in U$ либо $x \in A$, либо $x \in A^c$. Теперь можно записать следующую цепочку эквивалентных утверждений:

$$x \in (A^c)^c \;\Leftrightarrow\; [x \in U \text{ и } x \notin A^c] \;\Leftrightarrow\; [x \in U \text{ и } x \in A] \;\Leftrightarrow\; x \in A,$$

которая и является доказательством свойства 3. Свойства 4 и 5 есть частный случай соответствующих свойств разности. Они получаются, если заменить в формулах 4 и 5, доказанных в предыдущем пункте, A на U, B на A и C на B. Эти свойства, как и выше, называются *свойствами двойственности*.

5. Декартово произведение множеств

Пусть a – элемент множества A; b – элемент множества B. Рассмотрим множество, составленное из этих элементов.

Если $a \neq b$, то это множество представляет собой пару элементов $\{a, b\}$. Назовем в этой паре один из элементов *первым*, а другой – *вторым.* В таком случае (т. е. при внесении *порядка* в множество $\{a, b\}$) говорят об ***упорядоченной паре*** и вместо фигурных скобок используют круглые. Таким образом, исходя из множества $\{a, b\}$ можно образовать две упорядоченные пары (a, b) и (b, a). В каждой упорядоченной паре первым элементом является тот, который записан первым.

Если элементы a и b равны, $a = b$, то множество $\{a, b\}$ содержит только один элемент, однако и в этом случае говорят об *упорядоченной паре* (a, a), в которой первый и второй элементы совпадают.

Одна упорядоченная пара считается *равной* другой упорядоченной паре, если у них равны первые элементы и равны вторые элементы:

$$(a, b) = (c, d) \;\Leftrightarrow\; (a = c \text{ и } b = d).$$

Сравним последнее условие с условием равенства неупорядоченных пар:

$$\{a, b\} = \{c, d\} \;\Leftrightarrow\; [(a = c \text{ и } b = d) \text{ или } (a = d \text{ и } b = c)].$$

Ситуации, когда порядок в множестве из двух элементов играет существенную роль, встречаются часто. Например, если $\{A, B\}$ – пара точек в пространстве, то, считая точку A первой, а B – второй, можно говорить о векторе $\overrightarrow{AB}$, а поменяв эти точки местами, – о другом векторе $\overrightarrow{BA}$, противоположном первому.

Определение 10. Декартовым произведением *множества A и множества B называется множество $A \times B$, элементами которого являются все упорядоченные пары, где первый элемент есть произвольный эле-*

мент множества A, а второй элемент – произвольный элемент множества B, и только они:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in \mathrm{B}\}.$$

Декартово произведение $A \times A$ называется ***декартовым квадратом множества A*** *и обозначается A^2:* $A^2 = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$.

Например, если $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, то

$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$,
$A^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.

Возможность графического представления декартова произведения подсказывается следующим примером. Пусть Oxy – прямоугольная система координат на плоскости $\mathbf{E}^2$. Как известно, каждую координатную ось Ox и Oy можно при этом отождествить с множеством вещественных чисел $\mathbf{R}$: каждая точка A оси Ox с координатами $(a, 0)$ отождествляется с числом $a \in \mathbf{R}$, аналогично каждая точка B оси Oy с координатами $(0, b)$ отождествляется с числом b. Отождествим, кроме того, произвольную точку $M \in \mathbf{E}^2$ с координатами (a, b) с парой чисел (a, b). Тем самым плоскость $\mathbf{E}^2$ можно представлять себе либо как декартово произведение двух прямых $Ox \times Oy$, либо как декартов квадрат $\mathbf{R}^2$ множества вещественных чисел $\mathbf{R}$ (рис. 5).

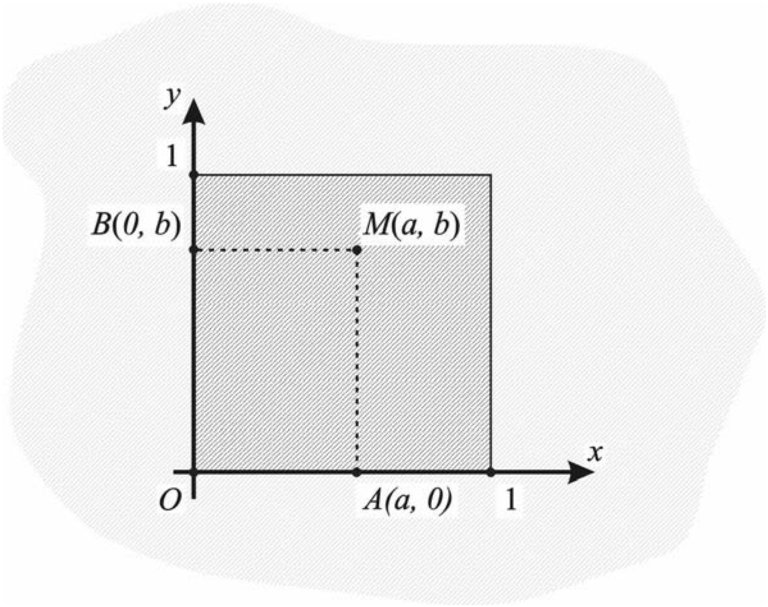

Рис. 5

Исходя из вышесказанного, декартово произведение $A \times B$ произвольных множеств A и B можно представлять так, как показано на рис. 6.

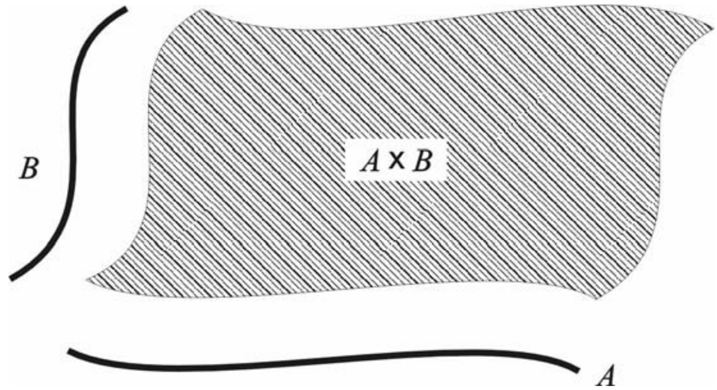

Рис. 6

Для любых множеств A, B, C верны следующие формулы:

1. $A\times B=\varnothing \ \Leftrightarrow\ (A=\varnothing$ или $B=\varnothing)$.
2. $(A_1\subseteq A$ и $B_1\subseteq B)\ \Rightarrow\ (A_1\times B_1\subseteq A\times B)$.
3. $A\times(B\bigcup C) = (A\times B)\bigcup(A\times C)$.
4. $(A\bigcup B)\times C = (A\times C)\bigcup(B\times C)$.
5. $A\times(B\bigcap C) = (A\times B)\bigcap(A\times C)$.
6. $(A\bigcap B)\times C = (A\times C)\bigcap(B\times C)$.

Доказательство этих формул непосредственно следует из определений операций над множествами.

Упражнение 8. (i) *Докажите формулы* 1–6.

(ii) *Пусть* A, B – *подмножества множества* X; A', B' – *подмножества множества* Y. *Можно ли множество* $(A\times A')\bigcup(B\times B')$ *представить в виде декартова произведения* $C\times C'$, *где* $C\subseteq X$, $C'\subseteq Y$?

Для иллюстрации формулы 2 рассмотрим в качестве множеств A и B множество действительных чисел $\mathbf{R}$, а в качестве множеств A_1 и B_1 единичный отрезок $I=[0;1]=\{x\in\mathbf{R} \mid 0\le x\le 1\}$. В этом случае, отождествляя, как отмечено выше, $\mathbf{R}^2$ с плоскостью $\mathbf{E}^2$, мы отождествляем множество $I\times I=I^2\subseteq\mathbf{R}^2$ с единичным квадратом на плоскости $\mathbf{E}^2$ (см. рис. 5).

Упражнение 9. *Возможно ли подобное представление для круга на плоскости? Точнее говоря, можно ли, отождествляя, как и выше, плоскость* $\mathbf{E}^2$ *с декартовым квадратом* $\mathbf{R}^2$, *представить круг* $\mathrm{D}(O, r)=\{M\in\mathbf{E}^2 \mid d(M,O)\le r\}$ *с центром в точке* O *и радиусом* $r>0$ *в виде декартова произведения* $A\times B$ *двух подмножеств прямой*?

Отметим, что декартово произведение множеств некоммутативно: *если* A *и* B – *непустые множества и* $A\neq B$, *то*

$$A\times B\neq B\times A.$$

Действительно, так как $A \neq B$, то или существует элемент a множества A, не принадлежащий множеству B, или существует элемент $b \in B$, не принадлежащий множеству A. В первом случае для любого элемента $b \in B$ упорядоченная пара (a, b) принадлежит множеству $A \times B$, но не принадлежит множеству $B \times A$, следовательно, $A \times B \neq B \times A$. Во втором случае рассуждения аналогичны.

Для фиксированных элементов $a \in A$ и $b \in B$ в декартовом произведении $A \times B$ выделим два подмножества: $\{a\} \times B$ и $A \times \{b\}$, которые называются соответственно ***вертикальным*** и ***горизонтальным слоями*** декартова произведения $A \times B$ (рис. 7).

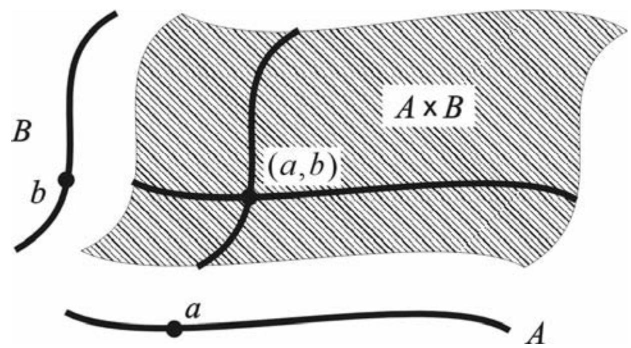

Рис. 7

Очевидно, что оба семейства $(\{a\} \times B)_{a \in A}$ и $(A \times \{b\})_{b \in B}$ являются разбиениями декартова произведения $A \times B$ соответственно на вертикальные и горизонтальные слои (разумеется, мы предполагаем в этом случае, что множества A и B непусты).

Обобщая понятие упорядоченной пары элементов, можно говорить об упорядоченной тройке, четверке элементов и т. д. Для произвольного натурального числа n понятие упорядоченного набора из n элементов введем следующим образом.

Пусть $\{1, 2, \ldots, n\}$ – множество, состоящее из первых n натуральных чисел. Пусть, далее, каждому числу $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ поставлен в соответствие некоторый элемент, который обозначим a_i. Набор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, составленный из таких элементов, называется ***последовательностью*** (***упорядоченным набором элементов***) ***длины n***. В этой терминологии упорядоченная пара элементов есть последовательность длины 2. Так же, как и в случае упорядоченной пары, элементы, составляющие последовательность длины n, не обязательно попарно различны.

Две последовательности называются *равными*, если у них совпадают длины, а также равны элементы, имеющие одинаковые номера. С помощью символов определение равенства конечных последовательностей записывается следующим образом:

$$[(a_1, a_2, ..., a_n), = (b_1, b_2, ..., b_k)] \Leftrightarrow (n = k \text{ и } a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_n = b_n).$$

Определение 11. *Пусть*

$$A_1, A_2, \ldots, A_n - \tag{7}$$

конечное семейство множеств. ***Декартовым*** (*или* ***прямым***) ***произведением семейства множеств*** (7) *называется множество всех последовательностей* $(a_1, a_2, ..., a_n)$, *длины* n, *у которых для каждого* $i \in \{1, 2, ..., n\}$ *элемент* a_i *с номером* i *принадлежит множеству* A_i.

Очевидно, что при $n = 2$ это определение совпадает с определением декартова произведения двух множеств. Декартово произведение семейства множеств (8) обозначается

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \quad \text{или} \quad \prod_{i=1}^{n} A_i.$$

С помощью формул определение 11 записывается в виде:

$$(x \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) \Leftrightarrow (x = (a_1, a_2, ..., a_n) \text{ и } \forall\ i \in \{1, 2, ..., n\}\ \ a_i \in A_i),$$

или, что то же самое,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid \forall\ i \in \{1, 2, ..., n\}\ \ a_i \in A_i\}.$$

В случае, когда все множества семейства (7) совпадают, т. е. $A_1 = A_2 = \ldots =$ $= A_n = A$, говорят об *n-й декартовой степени* множества A и употребляют обозначение A^n. Таким образом,

$$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid \forall\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\ \ a_i \in A\}.$$

Элементы множества A^n, т. е. упорядоченные наборы из n элементов множества A, называют также *словами длины n в алфавите A*.

§ 7. КОНСТРУКТИВНЫЕ АКСИОМЫ

Возвращаемся к аксиоматической теории множеств. Напомним, что согласно аксиоматическому методу построения теории множеств, принятому в **ZF**, мы исходим из первичных понятий (элемент, множество и отношение принадлежности между ними) и списка аксиом, описывающих эти понятия. Тем самым мы не обсуждаем вопрос существования того или иного множества, которое имеется в формулировках аксиом, но должны каждый раз установить (доказать) существование множеств, возникающих в процессе развития теории как результат определений.

Важную роль при формулировке последующих аксиом будут играть высказывательные формы, обсуждавшиеся в § 4. В аксиоматической теории множеств, в отличие от канторовой, нам придется несколько сузить совокупность рассматриваемых форм. Следуя аксиоматическому методу, будем исходить из небольшого набора простейших форм и укажем, каким образом из них можно строить более сложные.

Определение 1. Элементарными *высказывательными формами называются*:

(i) x *есть множество*;

(ii) $x \in y$ (x *является элементом* y);

(iii) $x = y$ (x *равно* y).

Из элементарных высказывательных форм по нижеописанным правилам 1–5 можно строить новые формы, которые рассматриваются в аксиоматической теории множеств **ZF**. Такие высказывательные формы будут называться ***допустимыми***.

1. Элементарные высказывательные формы допустимы.

2. Замена в элементарной высказывательной форме букв x и y любыми другими символами приводит к допустимой форме.

3. Если P и Q допустимые формы, то $\mathsf{P} \wedge \mathsf{Q}$, $\mathsf{P} \vee \mathsf{Q}$, $\mathsf{P} \Rightarrow \mathsf{Q}$, $\mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{Q}$, $\neg \mathsf{P}$ – допустимые формы.

4. Если форма $\mathsf{P}(x)$ допустима, то формы $\forall x\ \mathsf{P}(x)$, $\exists\ x\ \mathsf{P}(x)$ и $\exists!\ x\ \mathsf{P}(x)$ допустимы[1)].

5. Допустимыми являются все высказывательные формы, полученные из элементарных с помощью конечного применения правил 1–4.

В дальнейшем (в аксиоматической теории множеств) под высказывательной формой всегда будет пониматься допустимая высказывательная форма, поэтому слово “допустимая” опускается.

Если проводить последовательно принятую идеологию, то все аксиомы следовало бы выражать только с помощью высказывательных форм. Например, известная нам аксиома объемности (см. § 3) формально записывается следующим образом.

ZF$_\mathbf{I}$ – ***аксиома объемности***:

$$\forall x, y\, (\forall\, z\, ((z \in x) \Leftrightarrow (z \in y)) \Rightarrow x = y).$$

Однако мы не будем придерживаться такого изложения, а будем формулировать аксиомы, как правило, неформально, учитывая, что излагаемый в книге материал предназначен прежде всего для студентов первого курса. Единственное исключение сделано для весьма сложной *аксиомы подстановки* (см. 2.8), неформальное изложение которой могло бы привести к неоднозначным толкованиям.

[1)] Отметим, что высказывательную форму $\exists!\ x\ \mathsf{P}(x)$ можно было не включать в этот перечень, так как она выражается по правилам 1–3 через записанные ранее.

Логические переменные могут по-разному входить в высказывательную форму. Вхождение переменной называется *связанным*, если на каком-либо этапе ее построения эта переменная попадает в область действия кванторов всеобщности или существования. Например, для переменной x возникают высказывательные формы $\forall x$ **P** или $\exists\ x$ **P**. В противном случае вхождение переменной называется *свободным*, сама переменная также называется *свободной*.

Обратимся теперь к группе аксиом, объединенных общим названием “*конструктивные аксиомы*”. Эти аксиомы постулируют существование некоторых множеств, которые можно строить (конструировать), если считать, что какие-то множества уже имеются. Это позволяет расширять “запас” множеств, которые можно рассматривать в рамках **ZF**, исходя из некоторых, уже имеющихся.

$\mathbf{ZF_{II}}$ – ***аксиома выделения.*** *Если A – множество и* **P**(x) *– высказывательная форма, определенная на A, то существует подмножество A_{P} множества A, являющееся областью истинности формы* **P**(x).

Замечание 1. В силу аксиомы объемности всякое *множество, существование которого гарантируется аксиомой выделения для какой-либо конкретной высказывательной формы* **P**(x), *определено однозначно*, поскольку заданием формы указывается объем этого множества.

Мы не можем указать много примеров использования аксиомы выделения, поскольку она применяется к уже имеющимся множествам, о которых в рассмотренной ранее части аксиоматики **ZF** ничего не говорилось. Тем не менее два содержательных примера можно привести.

Определение 2. *Множество, не содержащее элементов* (*т. е. не связанное отношением принадлежности ни с одним элементом*), *называется* ***пустым***.

Теорема 1. *Пустое множество существует.*

Доказательство. Пусть A – произвольное множество. Рассмотрим высказывательную форму **P**(x):

$$\neg(x = x),$$

которая определена на A, поскольку вместо x можно подставить любой элемент. Если множество A не содержит элементов, то A – пустое множество и доказательство в таком случае завершается. Если же A не пустое, то для любого элемента $a\in A$ высказывание $a\neq a$ ложно и, следовательно, множество A_{P}, существование которого гарантируется аксиомой выделения, пустое.

Пустое множество обозначим $\varnothing$. Из аксиомы объемности вытекает, что *пустое множество единственное*, а из доказательства теоремы 1 – что оно *является подмножеством каждого множества*.

Пусть a – некоторый элемент. Обозначим символом $\{a\}$ множество, обладающее следующими двумя свойствами:

(i) $a \in \{a\}$;

(ii) $b \notin \{a\}$ *для каждого элемента* b, *не совпадающего с* a.

Теорема 2. *Для любого элемента* a *существует множество* $\{a\}$.

Доказательство. В аксиоматике **ZF** предполагается, что каждый элемент принадлежит какому-либо множеству. Пусть A – множество, содержащее элемент a. Рассмотрим следующую высказывательную форму $\mathsf{P}(x)$, определенную на множестве A:

$$x = a.$$

По аксиоме выделения существует множество A_{P}. Очевидно, что $A_{\mathsf{P}}=\{a\}$.

Множество $\{a\}$ называется ***одноэлементным множеством***, содержащим элемент a.

Далее речь идет о разности двух множеств, объединении и других множествах, получающихся в результате применения теоретико-множественных операций, определенных в § 6. В системе **ZF** эти понятия определяются так же, как и в канторовой теории множеств.

Теорема 3. *Для любых множеств* A *и* B *существует разность* $A \backslash B$.

Доказательство. Рассмотрим следующую высказывательную форму, заданную на множестве A:

$$\mathsf{P}(x):\quad x \in A \quad \text{и} \quad x \notin B.$$

Очевидно, что $A_{\mathsf{P}} = A \backslash B$. Теорема доказана.

Допуская некоторую вольность речи, можно сказать, что аксиома выделения позволяет строить множества “меньше” заданного, т. е. строительство новых множеств идет “в глубь” заданных. Обратный процесс возникает при введении последующих аксиом: здесь по заданным множествам строятся “бóльшие” множества.

$\mathbf{ZF_{III}}$ – *аксиома множества-степени.* *Для произвольного множества* A *существует множество* $P(A)$, *элементами которого являются все подмножества множества* A *и только они.*

Множество $P(A)$ называется ***множеством-степенью*** (или ***булеаном***) *множества* A.

Например, если $A = \varnothing$, то единственное его подмножество совпадает с ним самим, т. е. $P(A) = \{\varnothing\}$; если $A = \{a\}$ – одноэлементное множество, то $P(A) = \{\varnothing, \{a\}\}$.

Упражнение 1. *Верно ли, что для данных множеств* A *и* B *из условия* $P(A) \subseteq P(B)$ *следует, что* $A \subseteq B$?

$\mathbf{ZF_{IV}}$ – *аксиома пары.* *Если* A, B – *множества и* $A \neq B$, *то существует множество* $\{A, B\}$, *элементами которого являются* A, B *и только они.*

Упражнение 2. *Убедитесь в том, что* $\{A, B\} = \{B, A\}$.

Аксиомы выделения, степени и пары позволяют уточнить связь между понятиями "элемент" и "множество". Например, верна следующая теорема.

Теорема 4. *Для произвольного множества B существует множество* $\{B\}$, *единственным элементом которого является B.*

Доказательство. Пусть $B = \varnothing$. Тогда множество $P(\varnothing)$, существующее по аксиоме степени, можно взять в качестве $\{B\}$, поскольку у $\varnothing$ нет никаких подмножеств, кроме $\varnothing$.

Пусть, далее, $B \neq \varnothing$. Тогда по аксиоме пары существует множество $A = \{B, \varnothing\}$. Определим на A высказывательную форму $\mathsf{P}(x)$:

$$x = B.$$

Очевидно, что A_{P} – искомое множество.

Из теоремы 2 вытекает, что каждое множество A является одновременно и элементом (например, элементом множества $\{A\}$). Это указывает на богатство "атомов", из которых может строиться "мир" множеств. В частности, пустое множество $\varnothing$, не содержащее элементов, само является элементом некоторого множества (например, $\{\varnothing\}$).

Расширим понятие пары $\{A, B\}$ на случай, когда $A = B$.

Определение 3. *Полагаем*: $\{A, A\} = \{A\}$.

По поводу последнего определения заметим следующее. Во-первых, это определение вместе с аксиомой пары позволяет говорить для множеств A и B (в том числе и совпадающих) о множестве, единственными элементами которого являются множества A и B. Во-вторых, мы могли бы говорить о паре "близнецов" A, но если у нас нет способа их различать, то на самом деле в нашем распоряжении нет ничего, кроме множества A. Если же мы попытаемся различать два экземпляра одного и того же множества A, то они станут неравными.

Следующая аксиома является одной из наиболее важных в **ZF**, в частности, она позволяет доказать существование пересечения и декартова произведения множеств.

$\mathbf{ZF_V}$ **–** ***аксиома объединения.*** *Для любого непустого множества A, элементы которого сами суть множества, существует множество, элементами которого являются все элементы, каждый из которых принадлежит хотя бы одному множеству из A, и только они.*

Упражнение 3. *Докажите единственность множества, о котором идет речь в аксиоме объединения.*

Покажем теперь, как с помощью аксиомы объединения устанавливается существование пересечения множеств.

Теорема 5. *Для каждого непустого множества C множеств существует множество, элементами которого являются в точности те элементы, которые принадлежат каждому множеству, принадлежащему C.*

Доказательство. Ввиду аксиомы объединения существует множество A, являющееся объединением множеств, принадлежащих C. Рассмотрим следующее характеристическое свойство **P** элементов множества A:

$$\forall B \in C, \quad x \in B.$$

Очевидно, что $A_{\mathbf{P}}$ – искомое множество. Теорема доказана.

Обратимся теперь к понятию декартова произведения двух множеств A и B, о котором шла речь в предыдущем параграфе в рамках "наивной" теории множеств. Напомним, что декартово произведение $A \times B$ определялось как множество всех упорядоченных пар элементов множеств A и B таких, что элементы из A являются первыми элементами пар, а элементы из B – вторыми. Чтобы определить понятие декартова произведения $A \times B$ в системе **ZF**, будем следовать такому плану:

1) определим понятие пары (неупорядоченной) $\{a, b\}$ элементов, $a \in A$, $b \in B$;

2) введем понятие упорядоченной пары элементов (a, b), $a \in A$, $b \in B$, как некоторого элемента;

3) с помощью аксиомы выделения установим существование множества, состоящего из всех упорядоченных пар (a, b), $a \in A$, $b \in B$, т. е. *докажем* существование декартова произведения $A \times B$.

Для реализации этого плана установим сначала существование двухэлементных множеств.

Теорема 6. *Если a и b – элементы, то существует множество, единственными элементами которого являются a и b.*

Доказательство. Рассмотрим множество-пару $C = \{\{a\}, \{b\}\}$, которое существует ввиду аксиомы пары. C есть множество, элементами которого являются множества, и аксиома объединения утверждает существование множества-объединения, единственными элементами которого являются элементы, входящие в множества $\{a\}$ и $\{b\}$, т. е. a и b. Теорема доказана.

Если a и b – различные элементы, то множество, о котором говорится в формулировке теоремы, обозначается $\{a, b\}$ и называется *двухэлементным* множеством или *неупорядоченной парой* (или просто *парой*) элементов.

Упражнение 4. *Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ – элементы. Докажите существование множества, элементами которого являются $a_1, a_2, ..., a_n$ и только они.*

Определение упорядоченной пары элементов предварим определением упорядоченной пары множеств. Для этого воспользуемся наличием множества-пары.

Определение 4. *Пусть A, B – множества.* ***Упорядоченной парой*** *множеств A и B называется множество $\{\{A\},\{A, B\}\}$. Множество A называется первым элементом пары, B – вторым. Упорядоченная пара множеств A и B обозначается (A, B).*

Упражнение 5. *Докажите единственность упорядоченной пары данных множеств A и B,* а *также то, что $(A, B) = (C, D)$ тогда и только тогда, когда $A = C$ и $B = D$.*

Обсудим подробнее определение 4, которое на первый взгляд может показаться довольно искусственным. Заметим, однако, что если под упорядоченной парой мы хотим понимать множество, то ввиду аксиомы объемности это не может быть множество-пара $\{A, B\}$, поскольку интуитивно ясно, что в случае неравных множеств A и B должны быть две упорядоченные пары: одна – с первым элементом A, а вторая – с первым элементом B. С другой стороны, мы все же хотели бы, чтобы упорядоченная *пара* состояла из *двух* элементов, которые бы однозначно определялись элементами A и B. Наконец, мы хотели бы, чтобы отличие первого элемента от второго в упорядоченной паре формулировалось в терминах системы **ZF** (а не с помощью, например, записи “вначале первый, а затем второй” – вспомним о существовании различных письменностей, среди которых встречаются и такие, где пишут и читают не слева направо, как принято в европейских языках, а справа налево (арабское письмо) или сверху вниз (китайское письмо)). Чтобы удовлетворить этим требованиям, при условии $A \neq B$, мы вначале рассматриваем два разных множества $\{A\}$ и $\{A, B\}$, однозначно возникающие из A и B (убедитесь, что $\{A\} \neq \{A, B\}$!), а затем строим множество-пару $\{\{A\},\{A, B\}\}$, в котором элементы неравноправны относительно включения (один элемент есть подмножество другого, но не наоборот). Эта неравноправность и позволяет нам выделить первый элемент A упорядоченной пары, второй же определяется как оставшееся множество B. В рассматриваемой ситуации очевидно, что $(A, B) \neq (B, A)$. Что касается случая $A = B$, то из определения вытекает, что $(A, A) = \{A\}$, что не кажется уже необычным после замечаний, сделанных выше.

Определим теперь понятие упорядоченной пары элементов (a, b), $a \in A$, $b \in B$. Соображения, аналогичные вышеприведенным, делают достаточно естественным следующее определение.

Определение 5. *Пусть A, B – множества.* ***Упорядоченной парой элементов*** *$a \in A$ и $b \in B$ с первым элементом a и вторым элементом b называется множество $\{\{a\},\{a, b\}\}$.*

Обозначается такая пара символом (a, b). В случае, когда $a = b$, считается, что первый и второй элементы пары совпадают.

Заметим теперь, что если $a \in A$, $b \in B$, то пара (a, b) является элементом множества $P(P(A \bigcup B))$. В самом деле, $\{a\},\{a, b\} \in P(A \bigcup B)$ и поэтому $(a, b) = \{\{a\},\{a, b\}\} \in P(P(A \bigcup B))$.

Теорема 7. (*Определение декартова произведения.*) *Пусть A, B – множества. Существует множество $A \times B$, состоящее из всех упорядоченных пар элементов (a, b), $a \in A$, $b \in B$. Множество $A \times B$ называется* ***декартовым произведением*** *множества A и множества B.*

Доказательство. Рассмотрим следующее характеристическое свойство **P** элементов множества $P(P(A \bigcup B))$:

$$(x = (a, b) \text{ обладает свойством } \mathbf{P}) \Leftrightarrow (a \in A \text{ и } b \in B).$$

Очевидно, что подмножество множества $P(P(A \bigcup B))$, которое определяется свойством **P**, совпадает с $A \times B$.

Упражнение 6. *Дайте определение и докажите существование декартова произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$.*

§ 8. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Элементы некоторого множества, равно как и элементы некоторого набора множеств, могут находиться между собой в различных отношениях (связях). В зависимости от числа n элементов, для которых определяется данное отношение, можно говорить об *унарных* ($n = 1$), *бинарных* ($n = 2$), *тернарных* ($n = 3$), … отношениях. Наиболее важными для математики являются бинарные отношения, составляющие предмет этого параграфа. Соблюдая естественную последовательность изложения, прежде чем перейти к бинарным отношениям, остановимся коротко на понятии унарного отношения.

Определение 1. *Пусть A – некоторое множество.* ***Унарным отношением*** *в множестве A называется любое подмножество R множества A.*

Если элемент a множества A является элементом подмножества R, то говорят, что “*элемент a находится в отношении R*”. Унарное отношение называется также свойством, поскольку описывает индивидуальное (безотносительно к другим элементам) свойство элементов. В этом контексте понятие “характеристическое свойство элементов множества A” (см. § 2 и 7) эквивалентно понятию “унарное отношение в множестве A”.

Примерами унарных отношений в множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$ могут служить следующие отношения:

R_1: "*быть четным числом*". Натуральное число n находится в отношении R_1, если число n четное. Таким образом,

$$R_1 = \{2, 4, 6, \ldots\};$$

R_2: "*не превосходить числа* 5". Все натуральные числа, которые находятся в этом отношении, составляют подмножество $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ множества $\mathbf{N}$;

R_3: "*быть меньше*, *чем* 1". Не существует натуральных чисел, которые находились бы в отношении R_3, т. е. $R_3 = \varnothing$.

Примерами унарных отношений (свойств) в множестве $P(\mathbf{E}^3)$ ***геометрических фигур*** (подмножеств в пространстве $\mathbf{E}^3$) являются следующие свойства фигуры:

R_4: "*быть плоской*". Фигура $\Phi \subseteq \mathbf{E}^3$ называется ***плоской***, если она лежит в некоторой плоскости, т. е. существует плоскость π такая, что $\Phi \subseteq \pi$;

R_5: "*быть ограниченной*". Фигура $\Phi \subseteq \mathbf{E}^3$ называется ***ограниченной***, если она помещается в некоторый шар, т. е. существует шар

$$D = \{M \in \mathbf{E}^3 \mid d(M, M_0) \le r\}$$

с центром в точке M_0 и радиусом $r > 0$ такой, что $\Phi \subseteq D$;

R_6: "*быть выпуклой* ". Фигура $\Phi \subseteq \mathbf{E}^3$ называется ***выпуклой***, если для любых двух точек фигуры Φ отрезок прямой, определяемый этими точками, содержится в фигуре Φ, т. е.

$$\forall \; M, N \in \Phi \quad [M, N] \subseteq \Phi.$$

Определение 2′. Бинарным отношением *в паре множеств* (A, B) (*или* ***бинарным отношением*** *между элементами множеств A и B*) *называется любое подмножество R декартова произведения $A \times B$.*

Если $A = B$, то бинарное отношение R называют ***бинарным отношением в множестве*** *A.*

Если $(a, b) \in R$, то говорят, что *элемент a находится в отношении R с элементом b* (*для элементов a и b выполняется отношение R*; *пара* (a, b) *находится в отношении R*) и пишут aRb.

Примеры. Отметим вначале бинарные отношения, которые задаются тривиальными подмножествами декартова произведения $A \times B$. Бинарное отношение $R = A \times B$ называется *универсальным* или *полным* отношением в паре множеств (A, B). Каждый элемент множества A находится в универсальном отношении с каждым элементом множества B. Напротив, *ну-*

левое, или *пустое*, отношение в паре множеств (A, B) задается пустым подмножеством $\varnothing \subseteq A \times B$.

Переходим к более содержательным примерам бинарных отношений.

1. R_1 – *отношение* ***принадлежности***. Для любого множества A отношение принадлежности элемента множеству есть бинарное отношение в паре множеств (A, $P(A)$); здесь $P(A)$ – булеан множества A. Если $a \in A$, $B \in P(A)$, то

$$aR_1B \;\Leftrightarrow\; a \in B.$$

На рис. 1 выделено отношение принадлежности как подмножество декартова произведения в случае трехэлементного множества $A = \{a, b, c\}$.

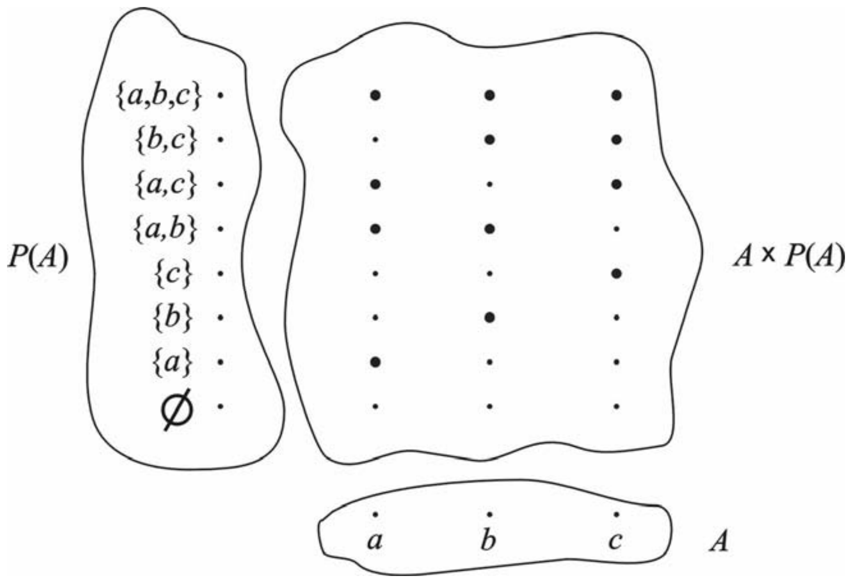

Рис. 1

2. R_2 – *отношение* ***равенства.*** Пусть A и B – два множества. Отношение *равенства* в паре множеств (A, B) определяется следующим образом: для любых $a \in A$, $b \in B$

$$aR_2b \;\Leftrightarrow\; a = b.$$

Отношение равенства как подмножество декартова произведения $A \times B$ описывается, очевидно, следующим образом: $R_2 = \{(c, c) \mid c \in A \cap B\}$. Если множества A и B не пересекаются, то $R_2 = \varnothing$. Если $A = B$, то R_2 есть отношение равенства в множестве A. В этом случае множество $R_2 \subseteq A^2$ называется ***диагональю*** декартова квадрата A^2 и обозначается E:

$$E = \{(a, a) \mid a \in A\}.$$

Примерами бинарных отношений, позволяющими пояснить происхождение термина “диагональ”, а также получить наглядные представления о бинарных отношениях и их свойствах, являются бинарные отношения в отрезке $I = [0, 1]$ числовой оси. Декартов квадрат отрезка $I\times I = I^2$ можно отождествить, как отмечено в § 6, с квадратом на плоскости $\mathbf{E}^2$, а произвольное бинарное отношение R в множестве I – с произвольным подмножеством квадрата (рис. 2).

Отношение равенства R_2 в отрезке I представляется диагональю квадрата K (рис. 3).

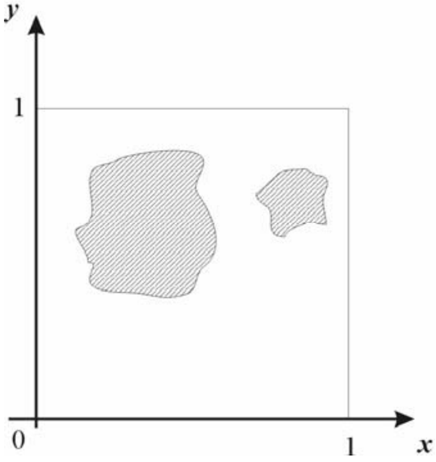

Рис. 2. Произвольное бинарное отношение в отрезке [0, 1]

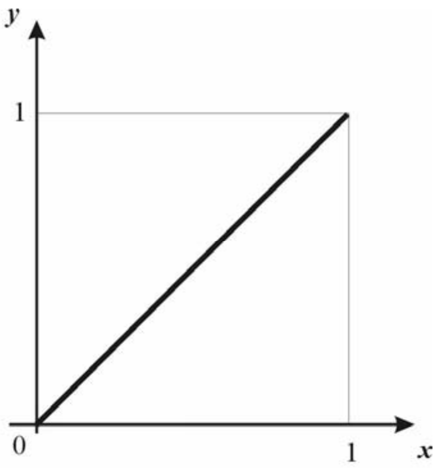

Рис. 3. Отношение равенства, как диагональ

В следующих пяти примерах речь идет о бинарных отношениях в множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$.

3. R_3 – *отношение* ***делимости***. Натуральное число m находится в отношении *делимости* с натуральным числом n, если m делится (нацело) на n: для любых $m, n\in\mathbf{N}$

$$mR_3n \;\Leftrightarrow\; \exists\, k\in\mathbf{N} \text{ такое, что } m = kn.$$

Например, $(6, 3)\in R_2$, но $(6, 4)\notin R_2$.

4. R_4 – *отношение* ***делить*** *или* ***быть делителем.*** Натуральное число m находится в отношении R_4 с натуральным числом n, если число m является делителем числа n: для любых $m, n\in\mathbf{N}$

$$mR_4n \;\Leftrightarrow\; \exists\, p\in\mathbf{N} \text{ такое, что } n = mp.$$

Например, $(1, n)\in R_4$ для любого $n\in\mathbf{N}$, $(2, 5)\notin R_4$.

5. R_5 – ***иметь один и тот же характер четности***. Натуральное число m находится в отношении R_5 с натуральным числом n, если либо m и n одновременно четные числа, либо m и n одновременно нечетные числа. Итак, для любых $m, n\in\mathbf{N}$

$$mR_5n \;\Leftrightarrow\; \exists\, k_1, k_2\in\mathbf{N} \text{ такие, что: } \begin{array}{l} \text{либо } (m = 2k_1 \text{ и } n = 2k_2), \\ \text{либо } (m = 2k_1 - 1 \text{ и } n = 2k_2 - 1). \end{array}$$

6. R_6 – *отношение* ***меньше или равно***: для любых $m, n \in \mathbf{N}$

$$mR_6n \Leftrightarrow m \le n.$$

7. R_7 – *отношение* ***взаимной простоты***: для любых $m, n \in \mathbf{N}$

$mR_7n \Leftrightarrow$ наибольший общий делитель m и n равен 1.

Например, $(12, 3) \notin R_7$, $(3, 4) \in R_7$.

Замечание 1. Отметим, что бинарные отношения *делимости*, *быть делителем*, *иметь один и тот же характер четности* можно рассматривать не только в множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$, но также в любом подмножестве множества целых чисел $\mathbf{Z}$.

Отношение *меньше или равно* можно рассматривать в любом подмножестве A множества вещественных чисел. В этом случае бинарное отношение $\le$ называется отношением ***естественного порядка*** в множестве A.

8. R_8 – *отношение* ***включения*** в булеане $P(X)$ данного множества X: для любых $A, B \in P(X)$

$$AR_8B \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

Упражнение 1. *Найдите число бинарных отношений в конечном множестве, содержащем n элементов.*

Для произвольного бинарного отношения $R \subseteq A \times B$ ***обратное*** отношение $R^{-1} \subseteq B \times A$ определяется условием: для любых $a \in A$, $b \in B$

$$BR^{-1}a \Leftrightarrow aRb. \quad (1)$$

Очевидно, из определения (1) вытекают два свойства обратного отношения:

1. $(R^{-1})^{-1} = R$ (*бинарное отношение и обратное к нему являются взаимно обратными*).

2. *Если* $R \subseteq S$, *то* $(R)^{-1} \subseteq (S)^{-1}$.

Примерами взаимно обратных бинарных отношений являются, очевидно, отношения R_3 делимости и R_4 делить в множестве $\mathbf{N}$.

Упражнение 2. *Пусть R – бинарное отношение в множестве A. Выразите через R бинарное отношение* $(\ldots((R^{-1})^{-1})^{-1}\ldots)$ (*n раз переход к обратному бинарному отношению*, $n \in \mathbf{N}$).

Для двух бинарных отношений $R \subseteq A \times B$ и $S \subseteq B \times C$ следующим образом определяется бинарное отношение $RS \subseteq A \times C$: для любых $a \in A$, $c \in C$

$a(RS)c$, *если и только если в множестве B существует элемент b, такой, что* aRb *и* bSc.

Бинарное отношение RS называется ***произведением бинарных отношений*** *R и S*.

Утверждение 1. *Умножение бинарных отношений ассоциативно*:

$$(RS)T = R(ST)$$

для любых бинарных отношений $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ *и* $T \subseteq C \times D$.

Упражнение 3. *Докажите утверждение* 1.

Отметим еще одно свойство обратного бинарного отношения.

3. *Для любых бинарных отношений* $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ *верно равенство*:

$$(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}. \qquad (2)$$

Действительно, $c(RS)^{-1}a \Leftrightarrow a(RS)c \Leftrightarrow (aRb$ и bSc для какого-то элемента b множества $B) \Leftrightarrow (cS^{-1}b$ и $bR^{-1}a) \Leftrightarrow c(S^{-1}R^{-1})a$. Тем самым $c(RS)^{-1}a \Leftrightarrow c(S^{-1}R^{-1})\,a$. Равенство (2) доказано.

Теперь определим четыре важных свойства, которыми может обладать бинарное отношение R в множестве A:

1) ***рефлексивность***: $\forall\ a \in A \quad aRa$;
2) ***симметричность***: $\forall\ a, b \in A$, если aRb, то bRa;
3) ***антисимметричность***: $\forall\, a, b \in A$, если aRb и bRa, то $a = b$;
4) ***транзитивность***: $\forall\ a, b, c \in A$, если aRb и bRc, то aRc.

При наглядном представлении бинарного отношения R в отрезке I рефлексивность отношения R означает, что это отношение изображается подмножеством R квадрата I^2, содержащим диагональ квадрата (рис. 4).

Симметричность R означает, что это отношение представляется подмножеством R квадрата I^2, симметричным относительно диагонали квадрата (рис. 5).

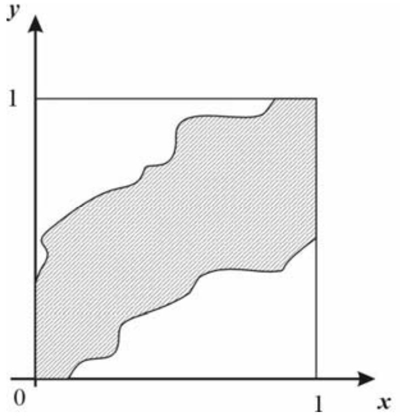

Рис. 4. Рефлексивное бинарное отношение

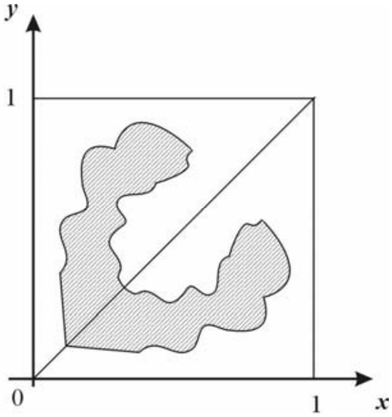

Рис. 5. Симметричное бинарное отношение

Антисимметричность означает, что множество R не содержит никакой пары точек, симметричных относительно диагонали квадрата, кроме, быть может, точек самой диагонали (рис. 6).

Транзитивные бинарные отношения в отрезке [0, 1] выделяются следующим геометрическим свойством. Пусть a, b, c – три попарно различные точки отрезка [0, 1]. Тогда $M(a, b)$ и $P(b, c)$ – две точки в квадрате I^2, которые вместе с точкой $N(b, b)$ являются тремя вершинами прямоугольника $MNPQ$. Отношение R в отрезке I транзитивно, если и только если всякий раз, когда множеству R принадлежат точки M и P, множеству R принадлежит и точка Q (рис. 7).

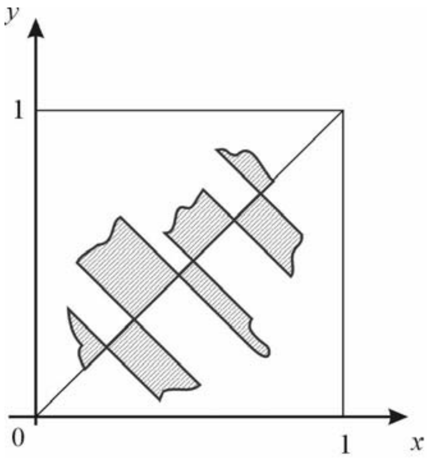

Рис. 6. Антисимметричное бинарное отношение

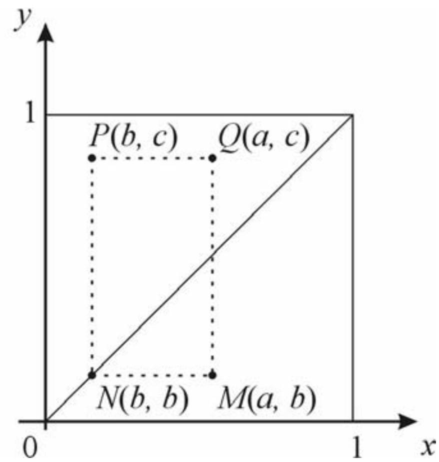

Рис. 7. Свойство транзитивности

Определенные выше свойства бинарных отношений на множестве A могут быть определены так же, как некие связи между отношениями как подмножествами декартова квадрата A^2.

Утверждение 2. *Пусть R – бинарное отношение в множестве A и пусть E – диагональ множества A^2. Тогда*:

(i) *R рефлексивно тогда и только тогда, когда* $E \subseteq R$;

(ii) *R симметрично тогда и только тогда, когда* $R^{-1} = R$;

(iii) *R антисимметрично тогда и только тогда, когда* $R \cap R^{-1} \subseteq E$;

(iv) *R транзитивно тогда и только тогда, когда* $R\,R \subseteq R$.

Доказательство. Утверждение (i) очевидно. Действительно, поскольку $E = \{(a, b) \in A^2 \mid b = a\}$, то включение $E \subseteq R$ означает в точности условие рефлексивности: $\forall\, a \in A \;\; aRa$.

Аналогично для (iii) и (iv).

Остается условие (ii). Пусть отношение R симметрично. Это означает, по определению, что

$$R^{-1} \subseteq R. \tag{3}$$

Учитывая свойства 2 и затем 1 обратного отношения, получаем:

$$(3) \Rightarrow (R^{-1})^{-1} \subseteq R^{-1} \Rightarrow R \subseteq R^{-1}.$$

Последнее включение вместе с (3) означает равенство $R^{-1} = R$. Обратно, если $R^{-1} = R$, то $R^{-1} \subseteq R$, что означает симметричность R.

Следствие 1. *Если бинарное отношение R имеет какое-либо из указанных выше свойств* 1) – 4), *то и R^{-1} имеет это же свойство.*

Упражнение 4. *Докажите следствие* 1.

Упражнение 5. *Пусть A – конечное множество, $|A| = n \geq 1$. Найдите число бинарных (рефлексивных бинарных, симметричных бинарных, антисимметричных бинарных) отношений в множестве A.*

Упражнение 6. *Найдите число транзитивных бинарных отношений в множестве из четырех элементов.*

Упражнение 7. *Убедитесь, что определенные выше бинарные отношения обладают следующими свойствами:*

(i) *каждое из следующих бинарных отношений: диагональ, полное отношение на любом множестве; "иметь один и тот же характер четности" в множестве* **N** *является примером рефлексивного, симметричного и транзитивного бинарного отношения;*

(ii) *пустое отношение в любом множестве симметрично, антисимметрично и транзитивно, но не рефлексивно;*

(iii) *отношения "быть делителем", "делимости" в множестве* **N**; *"не превосходит" в множестве действительных чисел* **R**; *"включения" в булеане $P(X)$ непустого множества X рефлексивны, антисимметричны и транзитивны, но не симметричны;*

(iv) *отношение взаимной простоты в множестве* **N** *из всех определенных выше свойств имеет только свойство симметричности.*

В заключение параграфа приведем пример *тернарного* отношения (т. е. отношения, в котором участвуют тройки элементов) в множестве **N**. Любое такое отношение есть подмножество R декартова куба $\mathbf{N}^3 = \mathbf{N} \times \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Для любых $m, n, p \in \mathbf{N}$ положим:

$$(m, n, \mathrm{p}) \in R \iff m + n = p.$$

Таким образом, операция сложения есть пример тернарного отношения в множестве **N**.

§ 9. ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Среди всех бинарных отношений наиболее важными для математики в целом являются отношения *эквивалентности*, отношения *порядка* и *функциональные* отношения. Роль этих трех классов отношений трудно переоценить. Достаточно отметить, что они лежат в основе классической математики. В этом параграфе рассматриваются отношения эквивалентности.

Определение 1. *Бинарное отношение в множестве A называется* ***отношением эквивалентности****, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Среди примеров бинарных отношений, рассмотренных в предыдущем параграфе, отношениями эквивалентности являются отношения *равенства* и *полное бинарное отношение* в произвольном множестве A, а также отношение *иметь один и тот же характер четности* в множестве натуральных чисел **N**.

Как правило, отношение эквивалентности обозначают символом ~. Таким образом, если R – отношение эквивалентности, то вместо aRb пишут $a \sim b$ и говорят при этом, что элемент a *эквивалентен* элементу b.

Поскольку отношение эквивалентности симметрично, то соотношения $a \sim b$ и $b \sim a$ могут выполняться только одновременно, и поэтому часто говорят, что два элемента эквивалентны, не заботясь о порядке, в котором рассматриваются эти элементы.

Так как отношение эквивалентности транзитивно, то *два элемента, эквивалентные третьему, эквивалентны*:

$$(a \sim \text{c и } b \sim \text{c}) \Rightarrow a \sim b.$$

Определение 2. *Пусть* $\sim$ *– отношение эквивалентности в множестве A. Зафиксируем произвольный элемент a этого множества и обозначим символом* $\overline{a}$ *множество всех элементов множества A, эквивалентных элементу a*:

$$\overline{a} = \{x \in A \mid x \sim a\}.$$

Множество $\overline{a}$ *называется* ***классом элементов, эквивалентных элементу*** *a (или просто* ***классом эквивалентности****). Элемент a называется* ***представителем*** *класса* $\overline{a}$.

Утверждение 1. *Для любого* $a \in A$ *класс эквивалентности* $\overline{a}$ *не пуст.*

Доказательство. Так как отношение эквивалентности рефлексивно, то $a \in \bar{a}$.

Утверждение 2. *Любые два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.*

Доказательство. Рассмотрим два произвольных класса эквивалентности $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Пусть $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \varnothing$ и $c \in \overline{a} \cap \overline{b}$. Каждый из элементов a и b эквивалентен элементу c, поэтому они эквивалентны между собой, $a \sim b$. Пусть теперь x – произвольный элемент класса $\overline{a}$. Так как $x \sim a$ и $a \sim b$, то x ~ b, т. е. $x \in \overline{b}$. А поскольку x – произвольный элемент класса $\overline{a}$, то $\overline{a} \subseteq \overline{b}$. Точно так же $\overline{b} \subseteq \overline{a}$, и, следовательно, $\overline{a} = \overline{b}$.

Из утверждения 2 следует, что *каждый элемент класса эквивалентности является представителем этого класса,* т. е. все элементы, входящие в один класс, взаимозаменяемы в этом смысле (“равноправны”).

Утверждение 3. *Объединение всех классов эквивалентности совпадает с множеством А.*

Доказательство. Пусть $B = \bigcup\limits_{a \in A} \overline{a}$ – рассматриваемое объединение. Если $x \in B$, то существует такой элемент $a \in A$, что $x \in \overline{a}$. Поскольку $\overline{a} \subseteq A$, то $x \in A$, следовательно, $B \subseteq A$. Обратное включение $A \subseteq B$ также очевидно: если $x \in A$, то $x \in \overline{a}$ и поэтому $x \in B$. Таким образом, $B = A$ и утверждение доказано.

Пусть $\{C_i \mid i \in I\}$ – множество всех классов эквивалентности ($C_i \neq C_j$, если $i \neq j$). ***Полной системой представителей*** классов эквивалентности называется любое множество H, в которое входит ровно по одному элементу из каждого класса:

$$H = \{a_i \in C_i \mid i \in I\}, \quad \forall\ i \in I \quad C_i \cap H = \{a_i\}.$$

Для заданного отношения эквивалентности нахождение полной системы представителей решает задачу описания множества классов эквивалентности.

Теорема 1. (i) *Для любого отношения эквивалентности R в множестве A множество всех классов эквивалентности является разбиением множества A.*

(ii) *Обратно, для любого разбиения множества A существует единственное отношение эквивалентности R в множестве A, для которого соотношение xRy выполняется тогда и только тогда, когда элементы x и* у *принадлежат одному классу этого разбиения.*

Доказательство. (i) Совокупность утверждений 1–3 означает в точности часть (i) теоремы.

(ii) Пусть C – произвольное разбиение множества A. Для любых элементов x и y множества A положим:

$xRy \Leftrightarrow$ элементы x и y принадлежат одному и тому же классу разбиения C.

Очевидно, что указанным условием в множестве A задается бинарное отношение R. Прямая проверка подтверждает, что R – искомое отношение эквивалентности. Единственность этого отношения вытекает из определения равенства бинарных отношений. Теорема доказана.

Используя теорему 1, любое отношение эквивалентности в множестве A можно получить по следующей схеме. Берется произвольное разбиение $C = \{C_j \mid j \in J\}$ множества A. Затем для каждого подмножества C_j

строится декартов квадрат $C_j \times C_j = C_j^2 \subseteq A \times A$. Объединение $R = \bigcup_{j \in J} C_j^2$ и есть пример произвольного отношения эквивалентности в множестве A.

Возьмем в качестве множества A отрезок $I = [0, 1]$ числовой оси, который служит нам для наглядной иллюстрации отношений того или иного типа. Для получения отношения эквивалентности в отрезке I будем следовать описанной выше схеме, взяв в качестве подмножеств C_j четыре полуоткрытых интервала $[0; a_1)$, $[a_1; a_2)$, $[a_2; a_3)$, $[a_3; a_4)$ и отрезок $[a_4; 1]$. Полученное таким образом отношение эквивалентности показано на рис. 1.

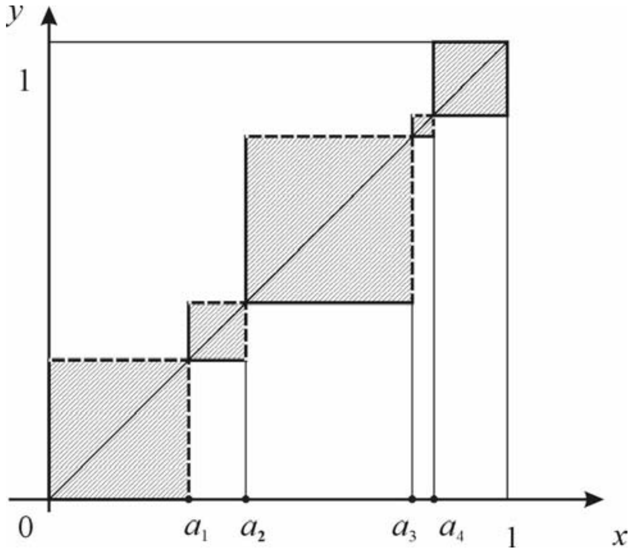

Рис. 1

Определение 3. *Пусть R – отношение эквивалентности в множестве A. Множество всех классов эквивалентности называется* ***фактормножеством*** *множества A по отношению эквивалентности R.*

Это фактормножество обозначается символом A/R. В этой терминологии теорема 1 утверждает, что *всякое фактормножество A/R является разбиением множества A и, в свою очередь, каждое разбиение множества A совпадает с фактормножеством A/R для некоторого, однозначно определенного отношения эквивалентности R.*

Простейшим примером эквивалентности является равенство (диагональ). Для произвольного множества A диагональ $E_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ включается в каждое отношение эквивалентности, определенное в A (рефлексивность). Более того, основные свойства равенства (рефлексивность, симметричность и транзитивность) приняты в качестве определения отношения эквивалентности, так что *понятие эквивалентности – ближайшее обобщение понятия равенства* (см. ниже комментарии к отношению равенства геометрических фигур).

Исключительная роль отношений эквивалентности в математике определяется их связью с разбиениями, устанавливаемой теоремой 1. В других областях науки и даже в практической деятельности людей эта связь также играет важную роль в вопросах, связанных с различного рода классификациями. В ряде конкретных ситуаций мы имеем дело с некоторой совокупностью объектов, иногда большой или даже огромной. Любой из этих объектов имеет свои индивидуальные особенности, *признаки.* Но никто не учитывает всякий раз *все* признаки каждого объекта, в зависимости от ситуации нас интересуют те или иные конкретные признаки, а все другие мы игнорируем. Если эти выделенные признаки совпадают у двух объектов, то мы считаем эти объекты *эквивалентными* (условно равными), т. е. принадлежащими одному классу. Далее вся исследуемая совокупность разбивается на непересекающиеся классы: в один класс объединяются те объекты, которые считаются *равными в данной конкретной ситуации*, т. е. которые *можно отождествить.* Таковы общая схема любой классификации и связь классификации с отношением эквивалентности.

Рассмотрим несколько примеров отношений эквивалентности геометрического характера.

1. ***Параллельность.*** Пусть A – множество всех прямых в пространстве $\mathbf{E}^3$ (или на плоскости $\mathbf{E}^2$). В элементарной геометрии прямая ∇_1 называется *параллельной* прямой ∇_2 ($\nabla_1 \,||\, \nabla_2$), если ∇_1 и ∇_2 лежат в одной плоскости и не пересекаются. Из определения следует, что отношение параллельности симметрично:

$$(\nabla_1 \,||\, \nabla_2) \Rightarrow (\nabla_2 \,||\, \nabla_1).$$

В курсе элементарной геометрии доказывается следующее свойство параллельных прямых: *если имеются три попарно различные прямые и две из них параллельны третьей, то эти три прямые попарно параллельны.* Это свойство похоже на свойство транзитивности отношения параллельности, однако не является в точности таковым (почему ?). Отношение параллельности прямых также не рефлексивно, следовательно, параллельность, в обычном понимании этого термина, не является эквивалентностью. Однако параллельность прямых можно понимать несколько шире по сравнению с первоначальным определением. А именно будем считать, что прямая ∇_1 *параллельна в широком смысле* прямой ∇_2, если либо ∇_1 параллельна ∇_2 (в смысле определения, приведенного выше), либо $\nabla_1 = \nabla_2$. Очевидно, параллельность прямых, понимаемая в этом расширенном смысле, есть отношение эквивалентности в множестве A всех прямых, и, следовательно, множество A разбивается на классы эквивалентности, каждый из которых состоит из попарно параллельных прямых. В качестве полной системы представителей классов параллельных прямых можно взять, например, *пучок прямых,* т. е. множество всех прямых, проходящих через фиксированную точку.

Класс параллельных прямых, в свою очередь, связан с понятием *направления.* Будем говорить, что каждый класс параллельных прямых A_∇ определяет *пару взаимно противоположных направлений* в пространстве $\mathbf{E}^3$ (или на плоскости $\mathbf{E}^2$). Для того чтобы определить понятие *направления,* следует обратиться к множеству L всех полупрямых (или лучей), лежащих на прямых класса A_∇, и задать на множестве L отношение эквивалентности следующим образом (ограничимся случаем плоскости $\mathbf{E}^2$).

Пусть l_1 и l_2 – два луча из множества L. Будем говорить, что луч l_1 *эквивалентен* лучу l_2, если выполняется одно из двух условий:

(i) l_1 и l_2 лежат на одной прямой и их пересечение $l_1 \cap l_2$ также является лучом;

(ii) l_1 и l_2 лежат на разных параллельных прямых и находятся в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через начала лучей l_1 и l_2 (рис. 2).

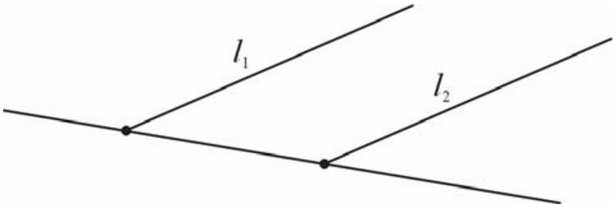

Рис. 2

Упражнение 1. (i) *Проверьте, что определенное отношение действительно является отношением эквивалентности в множестве лучей L.*

(ii) *Покажите, что имеется ровно два класса эквивалентных лучей, полную систему представителей которых составляют две различные полупрямые, определяемые какой-либо точкой фиксированной прямой из класса* A_∇ (рис. 3).

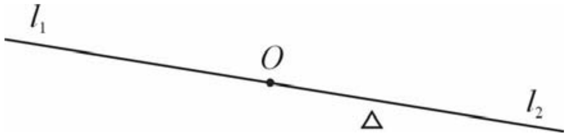

Рис. 3

Направлением на плоскости $\mathbf{E}^2$ называется класс эквивалентных лучей. Таким образом, каждый луч (полупрямая) задает на плоскости некоторое направление.

Аналогично можно определить понятие направления в пространстве $\mathbf{E}^3$, детали определения оставляются читателю в качестве упражнения.

Следующий пример является иллюстрацией фундаментальной роли, которую играет отношение эквивалентности в математике. А именно с помощью отношения эквивалентности можно определять новые математические понятия. Это происходит в том случае, когда мы переходим от множества A к фактормножеству $A/\sim$, т. е. вместо элементов рассматриваем классы эквивалентности. Тем самым мы вводим новые, более общие объекты исследования – элементы фактормножества.

2. *Векторы.* Пусть A и B – две точки пространства $\mathbf{E}^3$, различные либо совпадающие. *Направленным отрезком с началом в точке A и концом в точке B* называется упорядоченная пара точек (A, B). Далее для обозначения направленного отрезка вместо теоретико-множественного символа (A, B) будем использовать более привычную запись AB. Для любой точки A направленный отрезок AA будем называть *нулевым направленным отрезком.* У направленного отрезка AB есть две главные характеристики – длина и направление. *Длиной* отрезка AB называется расстояние между точками A и B. Длину отрезка AB будем обозначать $|AB|$. Итак, $|AB| = \mathrm{d}(A, B)$. Определим теперь направление. Каждый ненулевой направленный отрезок AB определяет луч l, который начинается в точке A и содержит точку B. *Направлением* такого отрезка AB будем называть направление, определяемое лучом l. Таким образом, направление отрезка AB – это класс лучей, эквивалентных лучу l (см. пример 1). Направление нулевого отрезка не определяется. Два направленных отрезка AB и CD называются *сонаправленными* ($AB\uparrow\uparrow CD$), если либо какой-то из них нулевой ($A = B$ или $C = D$), либо они оба ненулевые и имеют одно и то же направление. Итак, нулевой отрезок сонаправлен с любым другим отрезком. Пусть $\mathbf{A}$ – множество всех направленных отрезков пространства $\mathbf{E}^3$. Введем в множестве $\mathbf{A}$ отношение эквивалентности. Будем говорить, что направленный отрезок AB *эквивалентен* направленному отрезку CD ($AB \sim CD$), если они являются сонаправленными и их длины совпадают. Итак,

$$AB \sim CD \;\Leftrightarrow\; (|AB| = |CD| \text{ и } AB\uparrow\uparrow CD).$$

Легко проверить, что введенное бинарное отношение в множестве $\mathbf{A}$ есть действительно отношение эквивалентности.

***Определение 4. Вектором** в пространстве* $\mathbf{E}^3$ *называется класс эквивалентных направленных отрезков.*

Таким образом, каждый направленный отрезок AB определяет вектор в пространстве $\mathbf{E}^3$. Этот вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$. Из определения следует, что множество всех нулевых направленных отрезков образует один класс эквивалентности, т. е. вектор. Этот вектор называется *нулевым* *вектором* и обозначается $\vec{0}$. Множество всех векторов пространства $\mathbf{E}^3$, т. е. фактормножество $\mathbf{A}/\sim$, обозначим $V(\mathbf{E}^3)$. Поскольку каждый вектор определяется условиями равенств длин и направлений составляющих его направленных отрезков, то это позволяет определить *длину и направление вектора* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ как длину и направление направленного отрезка AB. Направление нулевого вектора $\vec{0}$, как и нулевого отрезка, не определяется. В заключение отметим, что если ограничиться направленными отрезками какой-либо плоскости $\mathbf{E}^2$ или какой-либо прямой $\mathbf{E}^1$, то аналогично случаю пространства $\mathbf{E}^3$ можно определить множество векторов плоскости $V(\mathbf{E}^2)$ и множество векторов прямой $V(\mathbf{E}^1)$. Детальное изучение векторов проводится в курсе аналитической геометрии.

3. ***Равенство геометрических фигур***. *В*ажнейшим геометрическим примером отношения эквивалентности является то, что в элементарной геометрии называется *равенством фигур.* ***Фигурой*** будем называть любое подмножество Ф пространства $\mathbf{E}^3$ (или плоскости $\mathbf{E}^2$). В последующем изложении ограничимся, для простоты, случаем плоскости. Напомним, что в элементарной геометрии фигура $Ф_1$ называется *равной* фигуре $Ф_2$, если $Ф_1$ можно совместить с $Ф_2$ с помощью некоторого движения плоскости $\mathbf{E}^2$. В свою очередь, под *движением плоскости* понимается *преобразование*[1)] плоскости, представляющее собой последовательное выполнение конечного числа преобразований, каждое из которых есть одно из следующих:

1. Параллельный перенос плоскости на некоторый вектор $\vec{a}$ (см. рис. 4).

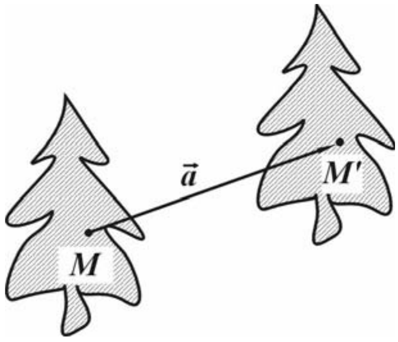

Рис. 4

[1)] Определение понятия *преобразования* будет дано в главе 2. В данный момент мы ограничиваемся интуитивным смыслом термина “преобразование”, поскольку в этом и в следующем примерах никакие другие преобразования, кроме тех, которые рассматриваются в школьной геометрии, не используются. Мы рекомендуем возвратиться к рассматриваемым сейчас примерам 3 и 4 после прочтения главы 2.

2. Поворот плоскости вокруг неподвижной точки O на некоторый угол α в одном из двух возможных направлений (рис. 5).

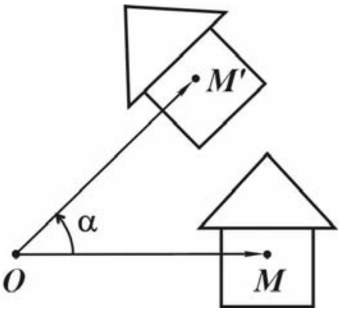

Рис. 5

3. Симметрия плоскости относительно некоторой прямой ∇ (рис. 6).

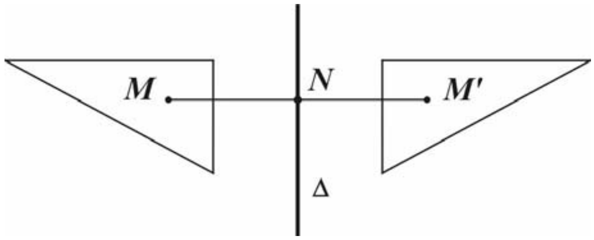

Рис. 6

Отметим три важных свойства движений.

Во-первых, частным случаем движения является параллельный перенос на нулевой вектор. При этом преобразовании все фигуры на плоскости остаются неподвижными, они не перемещаются. Такое преобразование называется *тождественным* преобразованием. Итак, *тождественное преобразование является движением*.

Во-вторых, *каждое движение f обратимо*, т. е. для движения f существует движение g, которое называется *обратным для f,* обладающее следующим свойством. Пусть Φ_1 – произвольная фигура, Φ_2 – фигура, в которую движение f переводит Φ_1. Тогда g переводит Φ_2 в Φ_1. Действительно, для параллельного переноса на вектор $\vec{a}$ обратным движением является параллельный перенос на вектор $-\vec{a}$. Для поворота плоскости вокруг некоторой точки на угол α в данном направлении обратным движением является поворот плоскости вокруг этой же точки на этот же угол α, но в противоположном направлении. Для симметрии плоскости относительно некоторой прямой обратным движением является эта же симметрия. Если движение f представляет собой последовательное выполнение нескольких преобразований f_i рассмотренного типа: f_1, затем f_2 и т. д., наконец, f_n, то, как легко видеть, обратное для f движение g

представляет собой последовательное выполнение преобразований g_i, обратных для f_i, но выполненных в обратном порядке: g_n, затем g_{n-1} и т. д., наконец, g_1.

В-третьих, как следует из определения движения, *последовательное выполнение двух движений является движением.*

Теперь сделаем важное терминологическое замечание. Обратим внимание на то, что приведенное понятие равенства фигур не является равенством в смысле совпадения или тождественности объекта самому себе. Действительно, если треугольник T_2 получен из треугольника T_1 с помощью параллельного переноса на ненулевой вектор, то T_1 и T_2, очевидно, не совпадают как множества и *не могут поэтому считаться равными* в первоначальном, истинном смысле этого слова. С этой точки зрения вместо термина "*равенство фигур*" в геометрии следовало бы использовать какой-либо другой термин, например "*конгруэнтность*" или "*совместимость*". Однако применение слова "*равенство*" в геометрии в общеупотребительном смысле оправдано, поскольку у равных фигур, например у равных треугольников, все их геометрические характеристики совпадают: длины соответствующих сторон, медиан, биссектрис, высот и других линейных элементов; величины соответствующих углов; площади и т. д.

Переходя от терминологии к сути примера, убедимся в том, что равенство фигур в геометрии есть отношение эквивалентности в множестве всех фигур.

1. *Равенство фигур рефлексивно.* Действительно, каждая фигура Ф равна себе самой, поскольку Ф совмещается с Ф тождественным преобразованием.

2. *Равенство фигур симметрично.* Действительно, если фигура $Ф_1$ совмещается с фигурой $Ф_2$ движением f, то фигура $Ф_2$ совмещается с фигурой $Ф_1$ обратным движением g.

3. *Равенство фигур транзитивно.* Действительно, если $Ф_1$ совмещается с $Ф_2$ движением f_1, а $Ф_2$ совмещается с $Ф_3$ движением f_2, то $Ф_1$ совмещается с $Ф_3$ движением, представляющим собой последовательное выполнение f_1 и f_2.

Таким образом, множество всех фигур разбивается на классы "равных" фигур. При этом, разумеется, в один класс попадают только фигуры одного типа: треугольник может быть "равен" только треугольнику, круг – кругу и т. д. Чтобы задать какой-нибудь класс "равных" треугольников, достаточно указать представителя этого класса. Один из признаков "равенства" треугольников утверждает, что два треугольника "равны" тогда и только тогда, когда каждая из трех сторон одного из этих треугольников соответственно равна одной из сторон второго треугольника. Если a, b, c – длины сторон треугольника, то вышеупомянутый признак “равенства” треугольников означает, что каждый класс “равных” треугольников полностью определяется тройкой чисел

$$\{a, b, c\} \text{ с условиями: } 0 < a \le b \le c, \quad c < a + b.$$

Такая тройка чисел – не единственная характеристика класса “равных” треугольников. Другой известный признак равенства треугольников означает, что в качестве характеристики класса “равных” треугольников можно взять также длины двух сторон треугольника a, b и величину угла γ между ними, т. е. тройку чисел

$$\{a, b, \gamma\} \text{ с условиями: } 0 < a \le b, \quad 0 < \gamma < \pi.$$

Упражнение 2. *Напишите еще одну возможную характеристику класса равных треугольников, эквивалентную третьему признаку равенства треугольников.*

В случае произвольного отношения эквивалентности важной задачей является нахождение удобных характеристик классов эквивалентных элементов (подобных вышеназванным тройкам чисел).

4. ***Подобие.*** Пусть Φ_1 и Φ_2 – две фигуры в пространстве $\mathbf{E}^3$ или на плоскости $\mathbf{E}^2$. Фигура Φ_1 называется *подобной* фигуре Φ_2, если Φ_1 совмещается с Φ_2 с помощью преобразования f пространства (или плоскости), представляющего собой последовательное выполнение движения f_1 и гомотетии f_2 с некоторым центром O и коэффициентом гомотетии $k > 0$. Легко видеть, что подобие есть отношение эквивалентности в множестве всех фигур в пространстве $\mathbf{E}^3$ или на плоскости $\mathbf{E}^2$. Проверка этого утверждения вполне аналогична рассуждениям, которые использовались в случае отношения равенства в предыдущем примере.

Из определения подобных фигур вытекает, что равные фигуры подобны между собой, поскольку гомотетия f_2 с коэффициентом $k = 1$ представляет собой тождественное преобразование, и поэтому последовательное выполнение движения f_1 и подобия f_2 сводится к движению f_1. Таким образом, если фигура Ф содержится в некотором классе подобных фигур, то этот же класс включает в себя все фигуры, равные Ф. Это означает, что разбиение на классы подобных фигур является более грубым по сравнению с разбиением на классы равных фигур. Например, как следует из одного из признаков подобия треугольников, каждый класс подобных треугольников определяется не конкретной тройкой чисел $\{a, b, c\}$, задающей длины сторон треугольника (как в случае равенства), а множеством

$$\{\{\lambda a, \lambda b, \lambda c\} \mid \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \ne 0\}$$

пропорциональных троек чисел с условиями: $0 < a \le b \le c$, $c < a + b$.

ГЛАВА 2. ОТОБРАЖЕНИЯ

На протяжении этой главы X и Y обозначают произвольные непустые множества.

§ 1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ. ПРИМЕРЫ И ТЕРМИНОЛОГИЯ

***Определение 1. Функцией**, заданной на множестве X и принимающей значения в множестве Y, называется правило f, по которому каждому элементу x множества X ставится в соответствие элемент $f(x)$ множества Y. Множество X называется **областью определения** функции f, а множество Y – **областью значений** функции f. Элемент $f(x)$ называется **образом элемента** x, или **значением функции** f в точке x.*

Подчеркнем сразу, что согласно определению 1 каждому конкретному элементу x множества X по правилу f ставится в соответствие один и только один элемент $f(x)$. Другими словами, у каждого элемента множества X имеется единственный образ. Не являются функциями такие соответствия между элементами множества X и множества Y, при которых какому-то элементу $x \in X$ соответствуют два или более элемента множества Y, либо не соответствует ни один элемент множества Y. Добавим еще, что в определении 1 отнюдь не предполагается, что каждый элемент множества Y является значением $f(x)$ функции f в некоторой точке x.

Синонимом слова функция является слово ***отображение***.

Если f – функция, заданная на множестве X и принимающая значения в множестве Y, то говорят, что f есть *функция из X в Y* или что f *отображает* множество X в множество Y и что f *переводит элемент x в элемент* $f(x)$. В этой ситуации используются следующие обозначения:

$$f: X \to Y, x \mapsto f(x), \quad \text{или, короче,} \quad f: X \to Y. \tag{1}$$

Например,

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x^2 \quad \text{или} \quad \sin: \mathbf{R} \to [-1; 1], x \mapsto \sin x.$$

В первом примере правило f заключается в возведении действительного числа в квадрат, во втором – в переходе от числа x к числу $\sin x$.

Когда области определения и значений функции f ясны из контекста, функцию иногда записывают в виде

$$y = f(x).$$

Например, $y = x^2$ или $y = \sin x$. Символ x называется ***аргументом*** функции f. При этом говорят, что аргумент x функции f *пробегает* область определения X.

Если (1) – некоторая функция, $x\in X$, $y\in Y$ и $f(x)$ = y, то элемент x называется ***прообразом*** элемента y относительно функции f. Множество всех прообразов фиксированного элемента $y\in Y$ обозначается $f^{-1}(y)$ и называется ***полным прообразом*** (или ***инверсным***[1] ***образом***) элемента y.

Упражнение 1. *Пусть* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto x^2+4x+16$. *Найдите полные прообразы* $f^{-1}(0), f^{-1}(12), f^{-1}(20)$.

Определение 2. *Функция* $f_1 : X_1 \to Y_1$ *называется* ***равной*** *функции* $f_2 : X_2 \to Y_2$, *если* $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ и $f_1(x) = f_2(x)$ *для каждого* $x\in X$.

Итак, две функции равны, если у них совпадают области определения, области значений, а также образы произвольного элемента из области определения.

Возвратимся к исходному определению функции (определение 1). Это определение является традиционным, оно встречается в большинстве учебных пособий. Как правило, все учащиеся вкладывают в это понятие один и тот же смысл. Однако читатель должен заметить, что определение 1 является на самом деле описанием, но не определением – в нем термин "функция" определяется через понятие "правило", которое само требует определения. Следовательно, определением 1 понятие "функция" вводится как неопределяемый объект. Тем не менее имеющееся у нас понятие бинарного отношения (§ 1.8) позволяет "исправить" сложившуюся ситуацию, т. е. дать строгое определение функции (отображения).

Для задания какой-либо функции $f: X \to Y$ требуется для каждого элемента $x\in X$ указать его образ $f(x)\in Y$, другими словами, задать множество всех упорядоченных пар вида $(x, f(x))$, $x\in X$, т. е. некоторое подмножество F декартова произведения $X\times Y$. Поскольку каждый элемент $x\in X$, согласно определению 1, должен иметь ровно один образ $f(x)$, то упомянутое подмножество F должно удовлетворять следующему условию:

Для каждого элемента $x\in X$ *в множестве* Y *есть один и только один элемент* y *такой, что* $(x, y)\in F$.

Назовем это *условием функциональности для множества* F.

Итак, произвольная функция $f: X \to Y$ однозначно определяет некоторое подмножество F декартова произведения $X\times Y$, удовлетворяющее условию функциональности. Верно и обратное: произвольное подмножество $F\subseteq X\times Y$, удовлетворяющее условию функциональности, определяет единственную функцию $f: X \to Y$. Эта функция задается условием:

$$f(x) = \text{y} \iff (x, y)\in F.$$

---

[1] От латинского слова *inversio* – переворачивание, обращение.

Если теперь вспомнить, что произвольное подмножество декартова произведения $X \times Y$ называется бинарным отношением между элементами множеств X и Y, то становится естественным следующее определение функции (отображения).

Определение 3. *Бинарное отношение между элементами множеств X и Y, удовлетворяющее условию функциональности, называется* ***функциональным отношением****, или* ***отображением*** *множества X в множество Y, или* ***функцией****, заданной на множестве X и принимающей значения в множестве Y.*

Очевидно, что определения 1 и 3 описывают одно и то же понятие. Но только второе из них – определение 3 – действительно является определением, поскольку выражает понятие функции через уже известные понятия (бинарное отношение и условие функциональности).

Если $f: X \to Y$ – некоторая функция, то множество F, или, точнее,

$$F_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

обычно называется ***графиком*** функции f, однако фактически, согласно определению 3, понятия функции f и ее графика F_f совпадают. Начиная с этого момента, будем для этих понятий использовать одно и то же обозначение f.

Замечание 1. Только что определенное понятие графика функции f является более широким по сравнению с понятием “график функции”, которое употребляется в средней школе (гимназии, лицее и т. п.). В школе график определяется только для функций, у которых области определений и области значений суть множество вещественных чисел $\mathbf{R}$ или его подмножества, т. е. для функций вида

$$f: X \to Y,\ X \subseteq \mathbf{R},\ Y \subseteq \mathbf{R}. \tag{2}$$

Для таких функций при отождествлении множества $\mathbf{R}^2$ с плоскостью $\mathbf{E}^2$ (см. § 1.8) графики представляют собой подмножества плоскости (прямые, параболы, гиперболы, синусоиды и т. д.) и, следовательно, могут быть наглядно представлены в виде рисунков на школьной доске, листе книги или тетради. Следует иметь в виду, что используемые при этом рисунки не являются в точности графиками соответствующих функций, а лишь их некоторыми подобиями, эскизами. Это объясняется тем, что школьная доска, лист книги или тетради, любое место, где рисуются графики, есть нечто материальное и отнюдь не совпадающее с плоскостью $\mathbf{E}^2$, представляющей собой идеальный объект, абстракцию. В частности, на рисунке мы не можем передать свойство неограниченности прямой, параболы, гиперболы, синусоиды и т. д. Тем не менее рисунки графиков весьма полезны, так как геометрические образы помогают лучше понять многие свойства функций.

Впрочем, не для всех функций вида (2) можно нарисовать график. Например, для ***функции Дирихле***[1] $D : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, которая определяется условиями:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x - \text{рациональное число,} \\ 0, \text{ если x} - \text{иррациональное число,} \end{cases}$$

невозможно построить график, поскольку мы не можем на числовой прямой отделить рациональные числа от иррациональных.

Проще всего задать функцию $f: X \to Y$ тогда, когда множество X конечное. Если X содержит n элементов, $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, то любая функция, заданная на X и принимающая значения в множестве Y, представляет собой n-элементное множество

$$f = \{(x_1, f(x_1)),\ (x_2, f(x_2)), ..., (x_n, f(x_n))\},$$

являющееся подмножеством декартова произведения $X \times Y$.

Например, пусть $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Рассмотрим функцию $f: X \to Y$, которая элементам x_1 и x_2 ставит в соответствие элемент y_1, а элементу x_3 – элемент y_4. Как множество упорядоченных пар, функция f выглядит следующим образом:

$$f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_4)\}.$$

Для получения наглядного образа этой функции можно множества X и Y представить в виде наборов точек на плоскости, дополненных стрелками, каждая из которых начинается в точке x множества X и оканчивается в точке $f(x)$ множества Y (рис. 1).

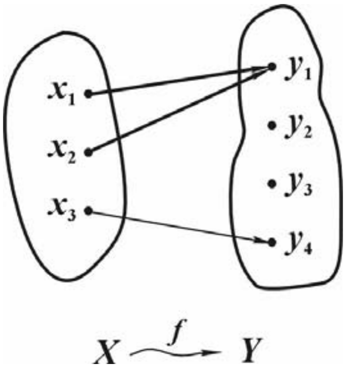

Рис. 1

---

[1] Лежен Дирихле (1805–1859) – немецкий математик, внесший большой вклад в развитие теории чисел и математического анализа.

Подобный наглядный образ можно иметь в виду и в случае произвольной функции $f : X \to Y$ (рис. 2).

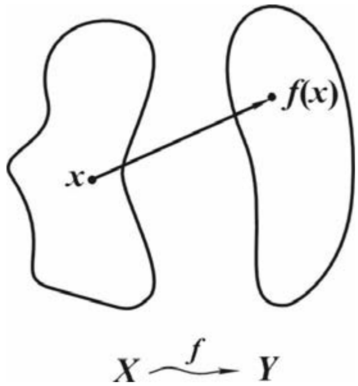

Рис. 2

Стрелка из x в $f(x)$ подчеркивает то обстоятельство, что функция f переводит элемент x в элемент $f(x)$.

В случае, когда множество определения X функции f бесконечно (или конечно, но содержит большое число элементов), функцию f невозможно (практически невозможно) задать перечислением пар элементов $(x, f(x))$, $x \in X$. В этом случае используют другие способы задания (см. приведенные ниже примеры), неизменным остается принцип – функция f, т. е. множество $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$, должно быть описано как можно более точно, чтобы избежать различных толкований.

Множество всех отображений X в Y обозначается X^Y. Следующее упражнение проясняет это обозначение.

***Упражнение* 2.** *Пусть X и Y – конечные множества, $|X| = n$, $|Y| = m$. Найдите число всех функций, заданных на множестве X и принимающих значения в множестве Y.*

Примеры функций

1. Пусть S – множество студентов Вашего университета, $\boldsymbol{N}$ – множество натуральных чисел. Существует функция $n : S \to \boldsymbol{N}$, которая каждому студенту $s \in S$ ставит в соответствие год его рождения $n(s)$.

В последующих примерах определяется несколько наиболее часто встречающихся в математике функций.

2. Пусть X – произвольное множество. Рассмотрим функцию **Id**, отображающую множество X в себя по правилу:

$$\mathbf{Id} : X \to X,\ x \mapsto x,$$

т. е. каждому элементу множества X, сопоставляющую этот же элемент. Функция $\mathbf{Id}$ называется ***тождественной функцией***[1] на множестве X. Разумеется, для каждого множества X имеется своя тождественная функция и, если нужно это подчеркнуть, используют обозначение $\mathbf{Id}_X$.

3. Пусть A – непустое подмножество множества X. Функция

$$\mathbf{i}_A : A \to X,\ x \mapsto x$$

называется ***каноническим*** (***естественным***) ***вложением***[2] подмножества A в объемлющее множество X.

4. Пусть X и Y – два множества, y_0 – фиксированный элемент множества Y. Функция

$$\mathbf{c} : X \to Y,\ x \mapsto y_0$$

называется ***постоянной функцией*** (***константой***). Постоянная функция каждый элемент множества X переводит в элемент y_0 множества Y, один и тот же для всех элементов множества X. Если множество значений Y есть числовое множество, т. е. y_0 – число, то это число часто используют для обозначения соответствующей постоянной функции, заботясь, разумеется, о том, чтобы это не приводило к двусмысленности (см. ниже формулу Эйлера).

Несмотря на простоту определения, часто постоянство той или иной функции выражает глубокие свойства изучаемых объектов. Чтобы убедиться в этом, сделаем небольшое отступление в последовательности примеров общематематических функций и рассмотрим три геометрических примера, приводящих к важному в математике понятию *эйлеровой характеристики.*

1) *Формула Эйлера*[3] *для прямой.* Пусть на прямой $\mathbf{E}^1$ задано В точек. Они разбивают прямую на Р частей. Говоря о разбиении прямой, мы понимаем следующее[4]. Если задана только одна точка a_1, т. е. В = 1, то прямая разбивается на два луча: $(-\infty; a_1]$ и $[a_1; +\infty)$, т. е. Р = 2; если заданы две точки a_1 и a_2, $a_1 < a_2$, т. е. В = 2, то прямая разбивается на два луча $(-\infty; a_1]$, $[a_2; +\infty)$ и отрезок $[a_1; a_2]$, т. е. Р = 3 и т. д. В общем случае, как легко доказать по индукции, Р = В + 1, или

$$\text{В} - \text{Р} = -1. \tag{3}$$

---

[1] *Identical* (англ.), *identique* (франц.) – от латинского *idem* – равный, тождественный, идентичный.

[2] Обозначение i_A – по первой букве слова *immersio* (лат.) – вложение.

[3] Леонард Эйлер (1707–1783) – выдающийся математик, физик, механик, астроном. Швейцарец по происхождению, долгие годы работал в Петербурге и Берлине. Подробнее о теореме Эйлера можно прочесть, например, в книге: Шашкин Ю. А. Эйлерова характеристика. М., 1984.

[4] Слово “разбиение” здесь употребляется в несколько ином смысле, чем в § 1.4.

Равенство (3) можно интерпретировать как постоянство следующей функции. Пусть X – множество всевозможных разбиений прямой $\mathbf{E}^1$ конечными наборами точек. Каждое такое разбиение, т. е. элемент x множества X, имеет две числовые характеристики: В(x) – число точек разбиения, которые называют “вершинами” разбиения, и Р(x) – число отрезков разбиения (включая и два луча), которые называют “ребрами” разбиения. Возникает функция

$$\chi : X \to \mathbf{Z},\ x \mapsto \text{В}(x) - \text{Р}(x)$$

и наши рассуждения показывают, что эта функция постоянная, принимающая на каждом разбиении значение – 1. Формула

$$\text{В}(x) - \text{Р}(x) = -1 \qquad (4)$$

называется *формулой Эйлера для прямой.* Здесь – 1, стоящая справа, обозначает постоянную функцию, принимающую в каждой точке x значение –1. Отметим, что формула (4) верна и в том случае, когда множество точек разбиения пустое. Если точек разбиения нет, т. е. В(x) = 0, то вся прямая является единственным отрезком разбиения, т. е. Р(x) = 1, равенство (4) выполняется и в этом случае.

Важность формулы Эйлера в том, что она выражает некое свойство прямой, поскольку число В(x) – Р(x) не зависит ни от количества точек разбиения, ни от их расположения.

Упражнение 3. *Найдите аналог формулы Эйлера для окружности.*

2) *Формула Эйлера для плоскости. Разбиением* плоскости $\mathbf{E}^2$ назовем конечный набор прямых. Будем обозначать произвольное разбиение, как и выше, буквой x. Для заданного разбиения плоскости *вершиной* разбиения назовем точку пересечения данных прямых, *ребром* – каждый из отрезков (включая бесконечные), на которые вершины разбивают данные прямые, и *гранью* – каждую из частей (включая бесконечные), на которые разобьется плоскость, если из нее удалить прямые разбиения. Три примера разбиений плоскости приведены на рис. 3.

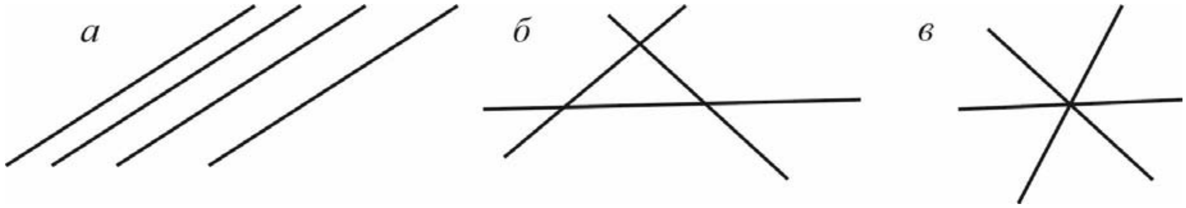

Рис. 3

Обозначим В(x), Р(x), Г(x) соответственно число вершин, ребер, граней данного разбиения x. Для разбиений, показанных на рис. 3, эти тройки чисел таковы: а) 0, 4, 5; б) 3, 9, 7; в) 1, 6, 6. Пусть X – множество всевозможных разбиений плоскости. Рассмотрим функцию

$$\chi : X \to \mathbf{Z},\ x \mapsto \mathrm{В}(x) - \mathrm{Р}(x) + \Gamma(x).$$

Элементарный подсчет показывает, что $\chi(x) = 1$ для каждого разбиения x на рис. 1. Можно доказать, что это же равенство выполняется для любого разбиения плоскости:

$$\mathrm{В}(x) - \mathrm{Р}(x) + \Gamma(x) = 1, \tag{5}$$

т. е. и в случае плоскости функция χ постоянная, однако равная теперь 1. Формула (5) называется *формулой Эйлера для плоскости.*

Упражнение 4. *Определите понятие разбиения пространства* $\mathbf{E}^3$ *и найдите формулу Эйлера для пространства.*

3) *Формула Эйлера для выпуклых многогранников.* Пусть X – множество выпуклых многогранников. Элементами множества X являются всевозможные пирамиды, призмы, параллелепипеды и т. д. Для произвольного многогранника $x \in X$ обозначим $\mathrm{В}(x)$, $\mathrm{Р}(x)$ и $\Gamma(x)$ соответственно числа вершин, ребер и граней многогранника x. Например, если x – треугольная пирамида, то $\mathrm{В}(x) = 4$, $\mathrm{Р}(x) = 6$ и $\Gamma(x) = 4$. Если x – куб или параллелепипед, то $\mathrm{В}(x) = 8$, $\mathrm{Р}(x) = 12$ и $\Gamma(x) = 6$. Рассмотрим функцию

$$\chi : X \to \mathbf{Z},\ x \mapsto \mathrm{В}(x) - \mathrm{Р}(x) + \Gamma(x).$$

Легко проверяется, что если x – треугольная пирамида, куб или параллелепипед, то $\chi(x) = 2$. Оказывается, что это неслучайное совпадение. Теорема, впервые доказанная Эйлером, утверждает, что функция χ – константа, принимающая значение 2 на каждом выпуклом многограннике. Формула

$$\mathrm{В}(x) - \mathrm{Р}(x) + \Gamma(x) = 2 \tag{6}$$

называется *формулой Эйлера для выпуклых многогранников.*

Можно заметить, что функции, определенные в каждом из трех примеров и обозначенные одной и той же буквой χ, построены по одному и тому же принципу. Такую функцию χ можно определить не только для прямой, плоскости или выпуклого многогранника, но также для многих фигур, для которых разумным образом может быть определено понятие разбиения. Эта функция называется ***эйлеровой характеристикой*** фигуры. Как и в приведенных примерах, эйлерова характеристика данной фигуры – это постоянная функция, принимающая некоторое целое значение.

Одним из важнейших следствий формулы (6) является описание правильных выпуклых многогранников. Напомним, что *правильным много-*

гранником (или *телом Платона*[1]) называется такой многогранник, все грани которого правильные многоугольники и все многогранные углы при вершинах правильные и равные. Правильные многогранники – это пространственные аналоги правильных многоугольников на плоскости. В отличие от плоскости, где существуют правильные n-угольники для любого натурального n, $n \geq 3$, ***в пространстве существуют лишь пять платоновых тел***. Эти тела изображены ниже на рис. 4–8.

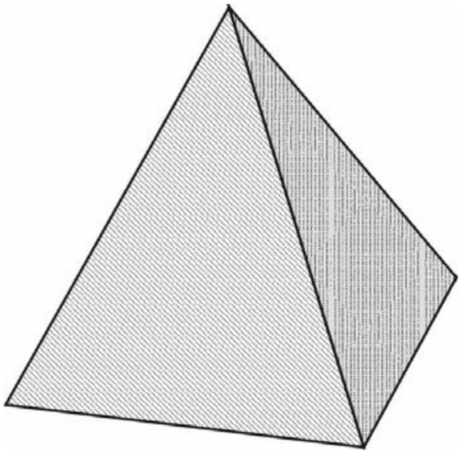

Рис. 4

Тетраэдр – правильный четырехгранник, все грани которого суть правильные треугольники (рис. 4).

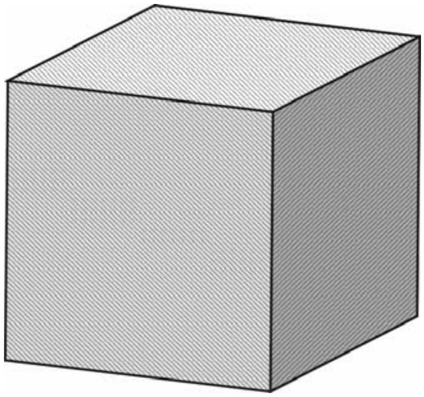

Рис. 5

Гексаэдр (***куб***) – правильный шестигранник, все грани которого суть правильные четырехугольники (квадраты) (рис. 5).

[1] Платон (V–IV вв. до н. э.) – древнегреческий философ.

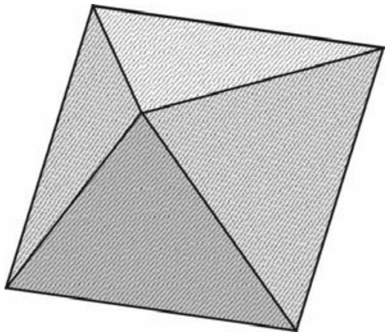

Рис. 6

Октаэдр – правильный восьмигранник, все грани которого суть правильные треугольники (рис. 6).

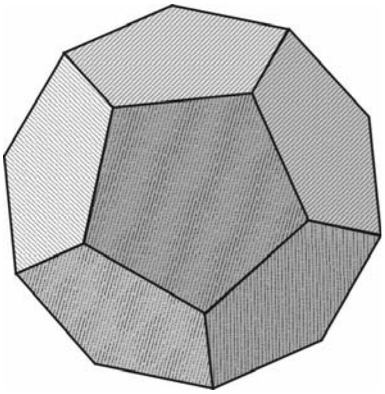

Рис. 7

Додекаэдр – правильный двенадцатигранник, все грани которого суть правильные пятиугольники (рис. 7).

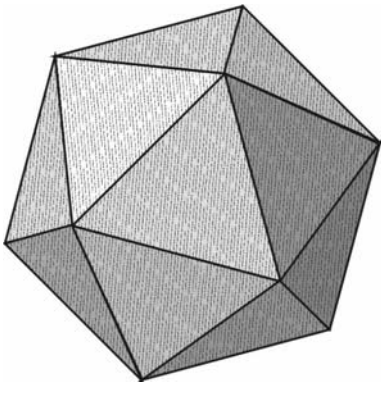

Рис. 8

Икосаэдр – правильный двадцатигранник, все грани которого суть правильные треугольники (рис. 8).

Используя формулу Эйлера (6), можно доказать, что, кроме этих пяти, других правильных многогранников не существует.

Возвращаемся к примерам основных общематематических функций.

5. Пусть $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ – декартово произведение n множеств. Для каждого индекса $i \in \{1, 2, ..., n\}$ функция

$$\mathbf{pr}_i : X \to X_i, \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_i$$

называется ***i-й проекцией*** (или проекцией декартова произведения X на i-й сомножитель).

Название “проекция” в этом случае используется по аналогии со следующим геометрическим примером, являющимся частным случаем рассматриваемой общей ситуации. Как отмечалось в § 1.6, плоскость $\mathbf{E}^2$ с заданной на ней декартовой системой координат Oxy может быть отождествлена с декартовым произведением координатных осей $Ox \times Oy$. В этом случае определяются две проекции $\mathbf{pr}_1$ и $\mathbf{pr}_2$, которые совпадают с обычными ортогональными проектированиями плоскости $\mathbf{E}^2$ на координатные оси Ox и Oy соответственно.

6. ***Функцией n переменных*** (***n аргументов***) называется любая функция, заданная на декартовом произведении n непустых множеств. Таким образом, функция n переменных – это отображение, которое записывается в виде

$$f : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y, (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

7. Пусть X – непустое множество; ~ – отношение эквивалентности на множестве X; $\bar{x}$ – класс эквивалентности элемента $x \in X$; $X/\sim$ – фактормножество множества X по отношению ~. Отображение

$$\mathbf{p} : X \to X/\sim, \ x \mapsto \bar{x}$$

называется ***канонической проекцией*** множества X на фактормножество $X/\sim$.

8. Пусть U – универсальное множество, A – подмножество множества U. ***Характеристической функцией*** подмножества A называется отображение, которое задается формулой

$$\chi_A : U \to \{0, 1\}, \ x \mapsto \begin{cases} 1, \text{если } x \in A, \\ 0, \text{если } x \in A^c. \end{cases}$$

Следующая серия примеров функций относится к так называемым *элементарным функциям*, с которыми учащийся знакомится в средней школе. Определение класса элементарных функций дается ниже, в § 3 после введения понятия *композиции* функций. Сейчас же отметим, что каждая элементарная функция определена либо на всем множестве вещественных чисел **R**, либо на его подмножестве и принимает значения в множестве **R** или его подмножестве. Наиболее важными среди элементарных функций являются следующие функции.

9. *Линейные функции.* ***Линейной функцией*** *называется функция вида*

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto ax + b,$$

a и b – фиксированные вещественные числа, $a \neq 0$.

10. *Квадратичные функции.* ***Квадратичной функцией*** *называется функция вида*

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto ax^2 + bx + \mathrm{c},$$

a, b и c – фиксированные вещественные числа, $a \neq 0$.

11. *Полиномиальные функции.* ***Полиномиальной функцией степени*** $n(n \in \mathbf{N} \cup \{0\})$ *называется функция вида*

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ *– фиксированные вещественные числа*, $a_n \neq 0$.

Постоянная функция $\mathbf{c} : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 0$, принимающая нулевое значение, также относится к полиномиальным функциям, только степень ее не определяется. Линейные и квадратичные функции являются полиномиальными функциями степени 1 и 2 соответственно.

12. *Степенные функции.* ***Степенной функцией*** *называется* ***функция вида***

$$y = x^m,\ m \text{ – фиксированное вещественное число.}$$

В зависимости от показателя степени m аргумент x степенной функции “пробегает” различные области определения:

1) если m – положительное рациональное число вида $\frac{p}{q}$, p, $q \in \mathbf{N}$, дробь $\frac{p}{q}$ несократима и q нечетное (в том случае, если m – натуральное число), то x “пробегает” множество **R**;

2) если m – отрицательное рациональное число вида $-\frac{p}{q}$, p, $q \in N$, дробь $\frac{p}{q}$ несократима, q нечетное, и m равно нулю, то x “пробегает” множество $\mathbf{R} \backslash \{0\}$;

3) при всех других действительных значениях показателя m аргумент x “пробегает” множество $\mathbf{R}^+$ положительных вещественных чисел.

Областью значений степенной функции является множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$.

13. *Тригонометрические функции*:

синус $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \sin x$,
косинус $\cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \cos x$,
тангенс $\mathrm{tg} : (\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbf{Z}\}) \to \mathbf{R},\ x \mapsto \mathrm{tg}\, x$,
котангенс $\mathrm{ctg} : (\mathbf{R} \setminus \{\pi n \mid n \in \mathbf{Z}\}) \to \mathbf{R},\ x \mapsto \mathrm{ctg}\, x$.

14. *Обратные тригонометрические функции*:

арксинус $\arcsin : [-1;\, 1] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \arcsin x$,
арккосинус $\arccos : [-1;\, 1] \to \mathbf{R},\ x \mapsto \arccos x$,
арктангенс $\mathrm{arctg} : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \mathrm{arctg}\, x$,
арккотангенс $\mathrm{arcctg} : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \mathrm{arcctg}\, x$.

15. ***Показательная*** (***экспоненциальная***) ***функция с основанием*** a:

$$\exp_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+,\ x \mapsto a^x,$$

а – фиксированное положительное вещественное число, не равное единице.

16. ***Логарифмическая функция с основанием*** a:

$$\log_a :\ \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R},\ x \mapsto \log_a x,$$

а – фиксированное положительное вещественное число, не равное единице.

Хотя, как отмечалось выше, слова “функция“ и “отображение” синонимы, однако в общей ситуации принято использовать термин “отображение”. Стремясь облегчить восприятие текста, мы начали с термина “функция”, считая его привычным для нашего читателя. Далее мы переходим на общепринятую терминологию. Термин “функция” употребляется главным образом тогда, когда область значений является *числовой*, т. е. состоит из чисел или некоторых их специальных обобщений[1)].

Приведем теперь несколько примеров, относящихся к элементарной геометрии. Речь пойдет о различных геометрических преобразованиях плоскости или пространства. В этом случае вместо термина “функция” более употребительным является термин “отображение”.

Пусть X – произвольное непустое множество. ***Преобразованием*** множества X называется любое отображение $f : X \to X$ множества X в себя.

[1)] Такие обобщения, например понятие *кольца*, изучаются в алгебре.

В общем случае ***геометрическое преобразование***, т. е. преобразование плоскости $\mathbf{E}^2$ или пространства $\mathbf{E}^3$, можно записать в виде

$$f : \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n, M \mapsto M', \quad n \in \{2, 3\}.$$

Здесь M обозначает произвольную точку плоскости ($n = 2$) или пространства ($n = 3$), M' – ее образ при отображении f. Конкретное отображение f определяется тем геометрическим правилом, по которому для точки M строится ее образ M'.

17. Параллельный перенос плоскости или пространства на фиксированный вектор $\vec{a}$. При параллельном переносе образ M' произвольной точки M однозначно определяется условием $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$.

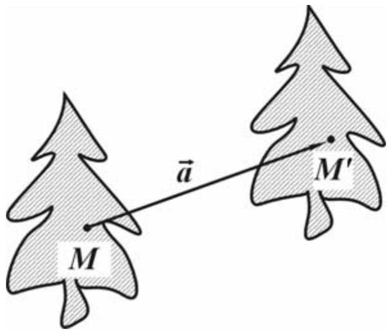

Рис. 9

Отметим, что *параллельный перенос на нулевой вектор* ($\vec{a} = \vec{0}$) *есть тождественное преобразование соответственно плоскости или пространства*.

18. Поворот плоскости на угол $\alpha \in \mathbf{R}$ в данном направлении вокруг неподвижной точки O. Здесь правило, задающее отображение f, формулируется следующим образом:

длины отрезков OM и OM' равны и направленный (*или ориентированный*) *угол от вектора $\overrightarrow{OM}$ до вектора $\overrightarrow{OM'}$ равен* α (рис. 10).

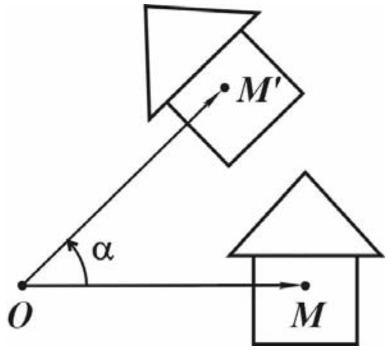

Рис. 10

На рисунке направление (одно из двух возможных) отсчета угла от одного вектора до другого показано стрелкой.

Отметим, что два поворота плоскости в одном направлении на углы α_1 и α_2 совпадают тогда и только тогда, когда числа α_1 и α_2 отличаются на число, кратное 2π. В частности, повороты на углы, кратные 2π, совпадают с тождественным преобразованием плоскости.

19. Гомотетия плоскости или пространства с центром в точке *O* и коэффициентом гомотетии $k > 0$. Условие, определяющее гомотетию, следующее: $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$ (рис. 11).

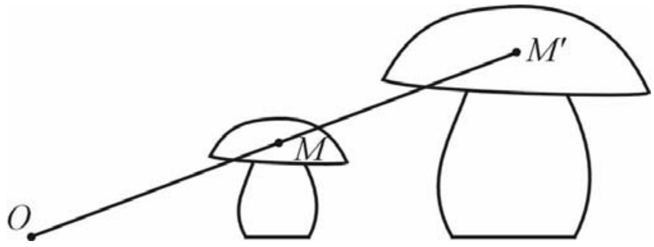

Рис. 11

20. Симметрия плоскости или пространства относительно фиксированной точки *O*: $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ (рис. 12).

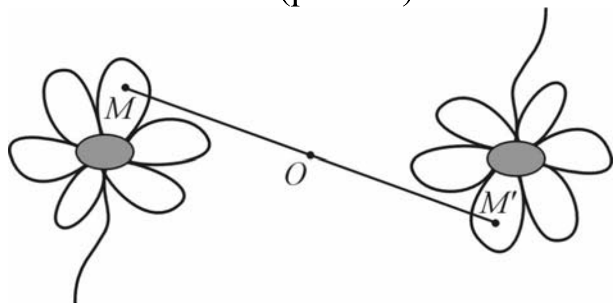

Рис. 12

21. Симметрия плоскости или пространства относительно фиксированной прямой $\Delta: \overrightarrow{NM'} = -\overrightarrow{NM}$ (рис. 13).

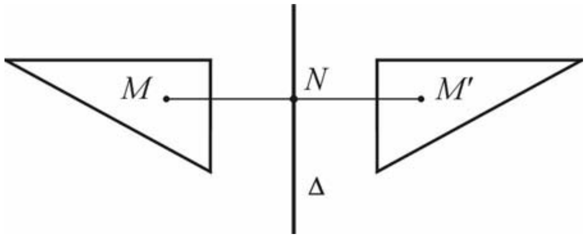

Рис. 13

Здесь точка N – основание перпендикуляра, опущенного из произвольной точки M на прямую Δ.

22. Симметрия пространства относительно фиксированной плоскости π: $\overrightarrow{NM'} = -\overrightarrow{NM}$. Здесь точка N – основание перпендикуляра, опущенного из произвольной точки M на плоскость π (рис. 14).

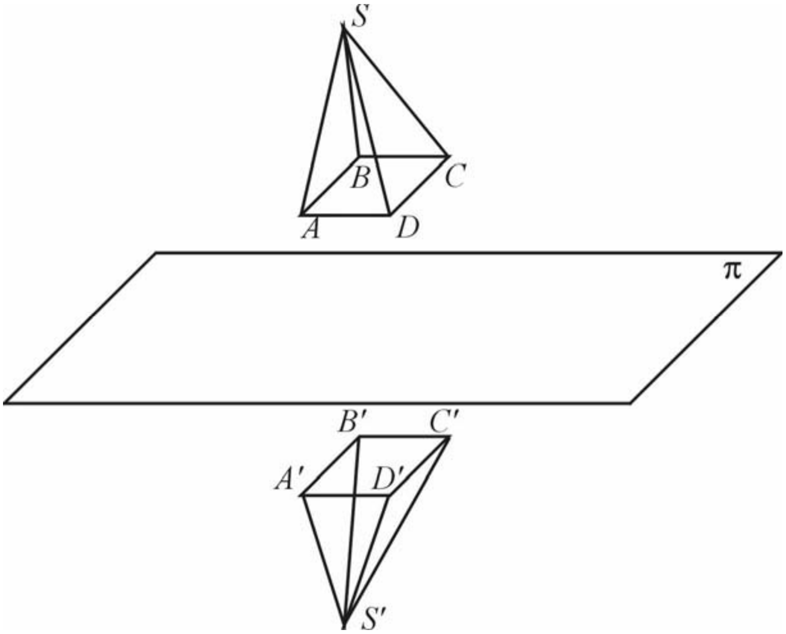

Рис. 14

23. Проекция плоскости на фиксированную прямую Δ **вдоль не параллельной ей прямой** Δ'. При этом проектировании образом произвольной точки $M \in \mathbf{E}^2$ является точка M' пересечения прямой Δ с прямой Δ'', проходящей через M и параллельной Δ' (рис. 15).

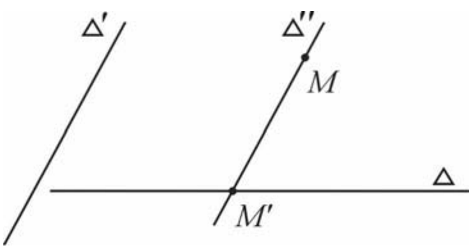

Рис. 15

При фиксировании на плоскости $\mathbf{E}^2$ системы координат Oxy можно рассматривать ортогональные проекции $\mathbf{pr}_1$ и $\mathbf{pr}_2$ плоскости на координатные оси Ox и Oy, о которых говорилось в примере 5. Очевидно, что они являются частными случаями проектирования, рассматриваемого в этом примере, а именно случаями, когда Δ и Δ' перпендикулярны.

Подобным образом определяются *проекция пространства на фиксированную плоскость* π *вдоль не параллельной ей прямой* Δ (рис. 16), *а* также *проекция пространства на фиксированную прямую* Δ *вдоль не параллельной ей плоскости* π (рис. 17).

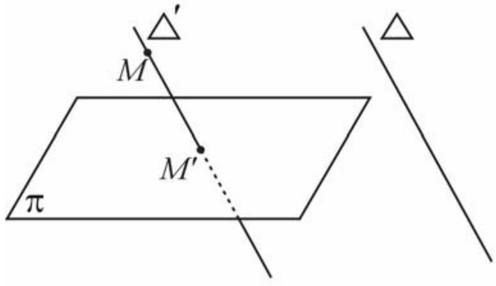

Рис. 16

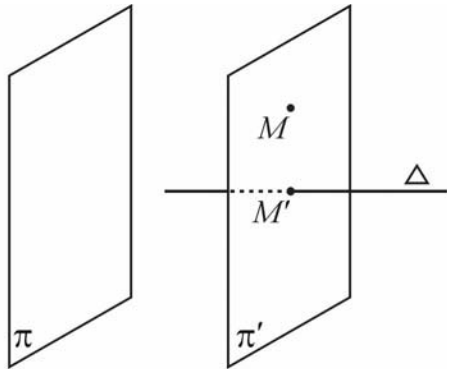

Рис. 17

24. Важным примером геометрического преобразования является ***инверсия*** плоскости относительно окружности с центром в данной точке O и радиусом r. При определении инверсии условия, задающие образ M' точки M, формулируются следующим образом:

1) точки M и M' лежат на одном луче, выходящим из точки O;

2) $|OM| \cdot |OM'| = r^2$.

Инверсия определена не на всей плоскости. Условие 2) не выполняется, если в качестве точки M (или точки M') взять центр окружности – точку O. Для любой точки плоскости M, отличной от O, точка M', очевидно, определяется однозначно. Таким образом, инверсия есть отображение

$$f: \mathbf{E}^2 \backslash \{O\} \to \mathbf{E}^2 \backslash \{O\}, M \mapsto M',$$

где M' удовлетворяет 1) и 2). Из определения очевидно вытекает, что инверсия следующим образом действует на точки плоскости:

– каждая точка исходной окружности остается неподвижной;

– каждая точка M, внутренняя относительно окружности, переходит в точку M', внешнюю относительно окружности;

– каждая точка M, внешняя относительно окружности, переходит в точку M', внутреннюю относительно окружности.

Более того, если учесть симметричность условий 1) и 2) относительно точек M и M', то можно утверждать следующее:

– если $f(M) = M'$, то $f(M') = M$, т. е. инверсия *переставляет* точки M и M'.

Отмеченные свойства похожи на свойства симметрии плоскости относительно прямой. Они позволяют считать инверсию своеобразной "симметрией относительно окружности"[1)].

Определение 4. *Пусть* $f : X \to Y$ *– некоторое отображение,* Z *– непустое подмножество множества* X*. Отображение* $g : Z \to Y$ *называется* ***ограничением*** (*или* ***сужением***) *на* Z отображения f*, если* $f(x) = g(x)$ $\forall\ x \in Z$*. При этих условиях отображение* f *называется* ***продолжением*** *отображения* g*.*

Другими словами, ограничение отображения f действует точно так же, как f, только при суженной области определения. Ограничение f на множество Z обозначается $f|_Z$ Очевидно, для каждого отображения $f : X \to Y$ единственным образом определяется его ограничение на любое непустое подмножество $Z : f|_Z : Z \to Y,\ x \mapsto f(x)$. С другой стороны, если $Z \subset X$, то продолжение f отображения $g : Z \to Y$ на множество X строится неоднозначно, если не накладывать никаких дополнительных условий на f.

Примером ограничения может служить каноническое вложение $i_A : A \to X$ подмножества A в объемлющее множество X. Отображение i_A есть ограничение на A тождественного отображения $\mathbf{Id}_X : X \to X$.

Сейчас можно уточнить понятие *семейства* элементов, о котором шла речь в § 1.6.

Определение 5. Семейством *элементов множества* X *с множеством индексов* I *называется произвольное отображение*

$$x : I \to X,\ i \mapsto x_i.$$

Как отмечалось ранее, такое семейство обозначается обычно $(x_i)_{i \in I}$ Понятие "семейство элементов множества X" отличается от понятия "подмножество элементов множества X". Элемент семейства x_i не является элементом множества X, а представляет собой упорядоченную пару $(i, x) \in I \times X$. Тем самым для разных индексов i и j элементы x_i и x_j могут совпадать как элементы множества X, не будучи равными как элементы семейства $(x_i)_{i \in I}$.

В соответствии с введенной терминологией *семейством множеств* $(X_i)_{i \in I}$ с множеством индексов I называется произвольное отображение вида $I \to P(U)$, $i \mapsto X_i$. Напомним, что все рассматриваемые множества

[1)] На самом деле аналогия между симметриями относительно прямых и инверсиями относительно окружностей является более глубокой. Они играют роль элементарных движений (первые – на евклидовой плоскости, а вторые – на плоскости Лобачевского (в одной из ее моделей)), последовательным выполнением которых можно получить любое движение (см. например, книгу: Яглом И. М. Геометрические преобразования. Т. 2. М., 1956).

считаются подмножествами некоего универсального множества U, обозначение $P(U)$ мы используем для множества всех подмножеств множества U.

Если множество индексов I есть множество $\{1, 2, ..., n\}$ первых n элементов натурального ряда $\mathbf{N}$, то каждое семейство

$$x : \{1, 2, ..., n\} \to X,\ i \mapsto x_i$$

естественным образом отождествляется с элементом $(x_1, x_2, ..., x_n)$ n-й декартовой степени $X^n = X \times X \times \ldots \times X$ множества X. Таким образом, *множество* X^n *можно рассматривать как множество всевозможных функций* x: $\{1, 2, ..., n\} \to X$. Набор $(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ***последовательностью длины*** n элементов множества X.

Расширяя область определения функций из предыдущего примера до всего множества натуральных чисел $\boldsymbol{N}$, приходим к понятию *бесконечной последовательности.*

Определение 6. Бесконечной последовательностью *элементов множества X называется отображение* $x : \mathbf{N} \to X$, $n \mapsto x_n$.

Сокращенное обозначение такой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ или просто (x_n).

Часто (например, в математическом анализе и других разделах математики, где рассматриваются только бесконечные последовательности) бесконечная последовательность элементов множества X называется коротко *последовательностью в множестве X.*

Определение 7. *Пусть* $x : P \to X$ *– последовательность в множестве X конечная* ($P = \{1, 2, \ldots, n\}$) *либо бесконечная* ($P = \mathbf{N}$). ***Подпоследовательностью*** *последовательности x называется ограничение* $x|_K : K \to X$ *отображения x на некоторое подмножество* $K \subseteq P$. *Подпоследовательность* $x|_K$ *называется конечной либо бесконечной в зависимости от конечности или бесконечности множества K.*

Из определения вытекает, что подпоследовательность задает, вообще говоря, не все элементы последовательности, а некоторую их часть.

Замечание. Любая бесконечная подпоследовательность $x|_K$ последовательности $x : \mathbf{N} \to X$ следующим естественным образом определяет бесконечную последовательность в множестве X. Пусть n_1 – наименьшее число в множестве K; n_2 – наименьшее число в множестве $K \setminus \{n_1\}$, ..., n_k – наименьшее число в множестве $K \setminus \{n_1, n_2, ..., n_{k-1}\}$, … Поскольку множество K бесконечно, то число n_k определяется для каждого натурального k. По построению чисел n_k, для любых $k_1, k_2 \in \boldsymbol{N}$ из условия $k_1 < k_2$ вытекает, что $n_{k_1} < n_{k_2}$. Определим последовательность

$$y : \mathbf{N} \to X, k \mapsto x_{n_k}.$$

Заметим, что множество $\{n_k \mid k \in N\}$ совпадает с множеством K. Достаточно показать, что любой элемент m множества K имеет вид n_k для некоторого натурального числа k. Пусть k_m – число таких элементов подпоследовательности $x|_K$, номера которых (в последовательности x) меньше m. Тогда, очевидно, $m = n_{k_m+1}$. Следовательно, отображение $x|_K$ и последовательность y задают в множестве X один и тот же набор элементов, только (если множество K не совпадает с $\mathbf{N}$) по-разному заиндексированный.

Упражнение 5. *Последовательность множеств* $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *называется* ***убывающей*** (***возрастающей***), *если для любого* $n\in\mathbf{N}$ *верно включение* $A_{n+1}\subseteq A_n$ (*соответственно* $A_n\subseteq A_{n+1}$). *Докажите следующие утверждения*:

(i) *Пересечение любой бесконечной подпоследовательности убывающей последовательности множеств совпадает с пересечением всей последовательности.*

(ii) *Объединение любой бесконечной подпоследовательности возрастающей последовательности множеств совпадает с объединением всей последовательности.*

В заключение параграфа обсудим понятие *уравнения*, тесно связанное с понятием функции. Одной из наиболее важных задач математики является решение уравнений. При этом встречающиеся в различных разделах математики уравнения настолько многообразны (уравнения алгебраические, логарифмические, иррациональные, тригонометрические, дифференциальные, интегральные и т. д.), что общее определение уравнения обычно не приводится. Между тем оно может быть без труда дано на основе понятия функции.

Определение 8. *Пусть* $f : X \to Y$, $g : Z \to W$ *– две функции.* ***Уравнением***, *связанным с функциями* f *и* g, *называется символическая запись задачи отыскания элементов* $c\in X\bigcap Z$, *для которых верно равенство* $f(c) = g(c)$. *Уравнение, связанное с функциями* f *и* g, *записывается в виде*

$$f(x) = g(x). \tag{7}$$

Искомый элемент c *называется* ***решением*** *уравнения* (7). ***Решить*** *уравнение* (7) *означает найти множество всех его решений* (*множество решений может быть и пустым*).

Ясно, что для существования хотя бы одного решения уравнения (7) необходимо, чтобы пересечения $X\bigcap Z$ и $Y\bigcap W$ были непустыми множествами.

Уравнение (7) относится к тому или иному типу в зависимости от типа функций f и g. В частности, если f и g полиномиальные функции, то уравнение (7) также называется *полиномиальным* или *алгебраическим*. Например, квадратное уравнение $x^2 + 7x + 2 = 0$ связано с функциями

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto x^2 + 7x + 2 \quad \text{и} \quad g : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 0.$$

Функция g здесь константа, принимающая значение 0 в любой точке множества **R**. Таким образом, в нашем примере уравнение имеет вид

$$f(x) = 0. \tag{8}$$

Уравнения именно такого вида, т. е. с нулевой функцией g, встречаются чаще всего. Так, в средней школе, где рассматриваются только элементарные функции, в виде (8) может быть записано любое уравнение (7). Для этого возьмем в левой части уравнения вместо функции f разность $f - g$:

$$(f - g)\,(x) = 0. \tag{9}$$

Такая замена допустима, поскольку, очевидно, множества всех решений уравнений (7) и (9) совпадают, т. е. уравнения (7) и (9) *эквивалентны*.

В общем случае уравнение (7) называется ***эквивалентным*** уравнению

$$u(x) = v(x), \tag{10}$$

если множества решений уравнений (8) и (10) совпадают.

Наиболее распространенный способ решения уравнения заключается в нахождении такой цепочки уравнений, эквивалентных данному, что последнее уравнение является достаточно простым для того, чтобы отыскать все его решения.

Аналогично одному уравнению определяется понятие *системы уравнений*, связанной с парами функций (f_1, g_1), ..., (f_n, g_n), как запись задачи нахождения таких элементов c, принадлежащих общей части областей определения функций $f_1, ..., f_n$, $g_1, ..., g_n$, для которых верны равенства: $f_1(c) = g_1(c)$, ..., $f_n(c) = g_n(c)$. Такая система уравнений записывается в виде

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x), \\ f_2(x) = g_2(x), \\ ------- \\ f_n(x) = g_n(x). \end{cases}$$

Рассматриваются также системы, состоящие из бесконечного набора уравнений. Все сказанное выше об уравнениях переносится на системы уравнений. Так, например, *эквивалентные системы уравнений* определяются как системы уравнений с равными множествами решений.

Весьма распространенными в математике являются линейные уравнения и системы линейных уравнений. Пусть a_1, a_2, ..., a_n, b – фиксированные вещественные числа. Функция вида

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R},\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

называется ***линейной функцией n действительных переменных***. Уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

т. е. уравнение, связанное с парой (f, b), где b – постоянная функция на $\mathbf{R}^n$, равная b, называется ***линейным уравнением с n неизвестными***. Системы линейных уравнений изучаются в разделе математики, который называется *линейной алгеброй.*

Если вместо линейных (т. е. степени 1) функций рассматриваются полиномиальные (т. е. произвольной натуральной степени) функции нескольких переменных, то соответствующие системы, а точнее, их решения, приводят к геометрическим объектам, которые изучаются в *алгебраической геометрии.* Простейшим примером здесь может служить система, состоящая из одного линейного и одного квадратного уравнений с двумя неизвестными. Такие системы рассматриваются в курсе *аналитической геометрии* и описывают пересечения линий второго порядка и прямых на плоскости.

Упражнение 6. *Покажите, что, используя понятие декартова произведения множеств, любую систему уравнений можно заменить одним уравнением.*

§ 2. КОМПОЗИЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ

Определение 1. Композицией *отображения $f : X \to Y$ и отображения $g : Y \to Z$ называется отображение*

$$g \circ f : X \to Z,\ x \mapsto g(f(x)). \tag{1}$$

В этом определении существенным является следующее:

■ Действие композиции $g \circ f$ двух отображений заключается в их последовательном выполнении: чтобы получить образ $(g \circ f)(x)$ произвольного элемента $x \in X$, нужно на x последовательно подействовать сначала отображением f и затем на полученный элемент $f(x)$ отображением g (рис. 1).

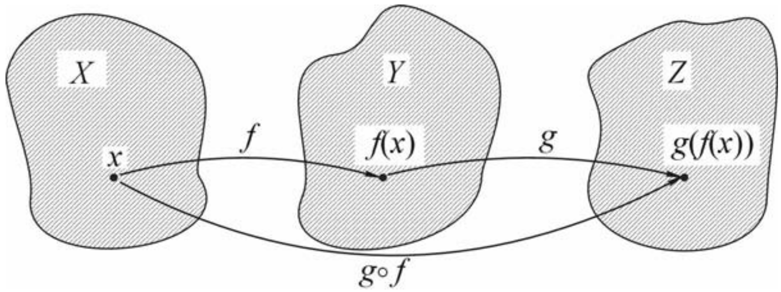

Рис. 1

■ Композиция $g \circ f$ определена только в том случае, когда область значений Y первого отображения f совпадает с областью определения второго отображения g.

■ В композиции двух отображений важен порядок участвующих отображений. В общем случае композиция $g \circ f$ может быть определена, а $f \circ g$ – нет (см. пример 1 ниже); в случае, когда обе композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ определены, отображения $g \circ f$ и $f \circ g$ могут быть различны (пример 2).

Замечание 1. Иногда композиция $g \circ f$ двух отображений определяется в чуть более общей ситуации. В этом случае

$$f : X \to Y,\ g : W \to Z, \text{ причем } f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq W.$$

При обоих вариантах определения композиция $g \circ f$ действует по одной и той же формуле (1). Мы выбираем первый вариант определения, поскольку он немного проще, а также потому, что второй вариант легко свести к первому, заменив область значений отображения f с Y на W, не изменяя его области определения X и закона действия f.

Примеры.

1. Пусть $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^+$, $n \mapsto n + 1$; $g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \lg x$. Тогда

$$g \circ f : \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ n \mapsto \lg(n + 1).$$

2. Пусть $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sin x$; $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 2x + 1$. В этом случае определены две композиции:

$g \circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 2\sin x + 1$, а также
$f \circ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sin(2x + 1)$.

Упражнение 1. *Покажите, что в обозначениях последнего примера* $g \circ f \neq f \circ g$.

Упражнение 2. (i) *Пусть* $h : \mathbf{E}^2 \to \mathbf{E}^2$ *– параллельный перенос плоскости* $\mathbf{E}^2$ *на какой-либо вектор* $\vec{a}$ *или поворот плоскости вокруг данной точки на некоторый угол* α. *Покажите, что существуют две симметрии* f_1 *и* f_2 *плоскости* $\mathbf{E}^2$ *относительно прямых* Δ_1 *и* Δ_2 *такие, что* $h = f_2 \circ f_1$.

(ii) *Пусть* h *– гомотетия плоскости относительно точки* O *с коэффициентом* $k > 0$. *Покажите, что существуют две инверсии* f_1 *и* f_2 *относительно окружностей с центрами в точке* O *такие, что*

$$h_{\mathbf{E}^2\setminus\{O\}} = f_2 \circ f_1.$$

Композиция отображений называется также ***произведением*** отображений. При употреблении этого термина следует различать произведение отображений и произведение функций в смысле математического анализа. В математическом анализе *произведением функций* $f : X_1 \to \mathbf{R}$ и $g : X_2 \to \mathbf{R}$ с областями определения X_1 и X_2 называется функция

$$fg : X_1 \cap X_2 \to \mathbf{R},\ x \mapsto f(x)g(x).$$

Другими словами, произведение функций в математическом анализе задается на общей части их областей определения, и образ элемента x есть произведение чисел $f(x)$ и $g(x)$. Так, произведение функций из примера 2 есть функция

$$fg :\ \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto (2x+1)\sin x.$$

Аналогично определяются другие арифметические операции над функциями: *частное* двух функций $\dfrac{f}{g}$, *сумма* $f + g$ и *разность* $f - g$.

Теперь, как было отмечено в первом параграфе, мы можем определить *класс элементарных функций.*

Определение 2. Элементарными функциями *называются функции в примерах* 9–16 *параграфа* 1, *а также все функции, которые можно получить из них с помощью конечного числа операций, каждая из которых есть одна из арифметических операций либо композиция отображений.*

Отметим, что композиция отображений (функций) $g \circ f$ иногда называется также ***сложной функцией*** или ***суперпозицией*** функций f и g. В этом случае функция f называется ***внутренней*** функцией, а g – ***внешней*** функцией.

Пусть имеются следующие три отображения:

$$f : X \to Y,\quad g : Y \to Z,\quad h : Z \to W.$$

В этом случае можно построить композицию $g \circ f : X \to Z, x \mapsto (g \circ f)(x)$, а затем композицию построенного отображения и отображения h:

$$h \circ (g \circ f) : X \to W,\ x \mapsto h((g \circ f))(x) = h(g(f(x))).$$

С другой стороны, можно сначала перемножить отображения g и h: $h \circ g : Y \to W$, а затем построить композицию f и $h \circ g$:

$$(h \circ g) \circ f : X \to W,\ x \mapsto (h \circ g)(f((x)) = h(g(f(x))).$$

Проведенное рассуждение показывает, что

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f,$$

т. е. операция композиции отображений обладает свойством ассоциативности. Доказанное свойство является фундаментальным и широко используется в математике. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1 **(*свойство ассоциативности композиции отображений*).** *Пусть отображения f, g и h таковы, что определено отображение $h\circ(g\circ f)$. Тогда определено отображение $(h\circ g)\circ f$ и верно равенство*

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f. \tag{2}$$

Из равенства (2) вытекает (см. рассуждения в § 1.6), что если для конечного набора отображений $f_1, f_2, \ldots, f_n$, $n\in\mathbf{N}$, определено отображение

$$f_1\circ f_2\circ \ldots \circ f_n \tag{3}$$

при каком-нибудь порядке выполнения композиций отображений, то отображение (3) определено при любом порядке выполнения композиции отображений, и все такие отображения совпадают, т. е. запись (3) имеет однозначный смысл. Разумеется, при этом предполагается, что при любом порядке выполнения композиции в (3) отображения f_i, $i\in\{1, 2, ..., n\}$ не переставляются.

Пусть f есть преобразование множества X, т. е. для f область определения и область значений совпадают, $f: X\to X$, $x\mapsto f(x)$. Для такого отображения можно определить его натуральную степень, а именно полагаем

$$f^1=f,\ \ f^2=f\circ f,\ ...,\ f^n=f\circ f\circ\ldots\circ f,\ n \text{ раз},\ \ n\in\mathbf{N}.$$

Считаем также, по определению, что нулевая степень f есть тождественное отображение множества X, $f^0=\mathbf{Id}_X$.

Упражнение 2. *Пусть $f: X\to X$ – некоторое преобразование множества X. Докажите, что для любых $n, m\in\{0, 1, 2, \ldots\}$ верны формулы*:

$$f^n\circ f^m=f^{n+m},\qquad (f^n)^m=f^{nm}.$$

Упражнение 3. *Пусть $f: X\to Y$, $x\mapsto f(x)$ – произвольное отображение. Докажите, что $f\circ\mathbf{Id}_X=f$, $\mathbf{Id}_Y\circ f=f$.*

Замечание 2. Последние два равенства означают, что тождественное преобразование относительно композиции отображений играет ту же роль, что единица относительно умножения чисел. В отличие от чисел, где единица единственная, для каждого множества имеется свое тождественное преобразование, т. е. своя единица относительно композиции отображений.

В математических рассуждениях встречаются ситуации, когда одновременно рассматриваются несколько отображений, связанных между собой. Для иллюстрации этих связей полезны диаграммы, составленные из стрелок, соединяющих символы, обозначающие области определений и множества, содержащие области значений участвующих отображений. Так, например, пусть имеются три отображения: $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ и $h : X \to Z$. Этой тройке отображений можно сопоставить следующую треугольную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd} \qquad (4)$$

Если при этом $h = g \circ f$, то диаграмма (4) называется *коммутативной диаграммой.* Часто встречаются также четырехугольные диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z \arrow[r, "v"'] & W \end{tikzcd} \qquad (5)$$

Говорят, что (5) есть *коммутативная диаграмма*, если $g \circ f = v \circ u$.

Определим понятие коммутативной диаграммы в общем случае. Пусть дана некоторая диаграмма отображений и пусть некоторая последовательность стрелок связывает два символа этой диаграммы, например X и W. Эта последовательность определяет отображение множества X в множество W, являющееся композицией нескольких отображений, входящих в диаграмму. Данная диаграмма называется *коммутативной*, если равны отображения, определяемые любыми двумя последовательностями стрелок, имеющими одно и то же начало и один и тот же конец.

§ 3. ОБРАЗЫ И ПРООБРАЗЫ

Пусть $f : X \to Y$ – некоторое отображение. Далее прописными буквами A, B, ... будем обозначать произвольные подмножества множества X, буквами со штрихами A', B', ... – произвольные подмножества множества Y.

Определение 1. Образом *подмножества A множества X при отображении f называется множество $f(A)$ образов всех элементов множества A, т. е.*

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Образ $f(X)$ всего множества X обозначается $\mathbf{Im}\, f$[1] *и называется **образом отображения** f.*

***Прообразом** подмножества A' множества Y при отображении f (или относительно f) называется множество $f^{-1}(A')$ всех элементов из X, образы которых при отображении f содержатся в A'*, т. е.

$$f^{-1}(A') = \{x \in X \mid f(x) \in A'\}.$$

Итак, образы множеств являются подмножествами множества Y, прообразы множеств суть подмножества множества X. Для произвольного элемента $y \in Y$ понятия “полный прообраз элемента y” и “прообраз одноэлементного множества $\{y\}$” совпадают:

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\}).$$

Отметим следующие основные свойства образов и прообразов множеств.

1. $A \subseteq B \;\Rightarrow\; f(A) \subseteq f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
4. $A \neq \varnothing \;\Leftrightarrow\; f(A) \neq \varnothing$.
5. $A' \subseteq B' \;\Rightarrow\; f^{-1}(A') \subseteq f^{-1}(B')$.
6. $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.
7. $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.
8. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
9. $f(f^{-1}(A')) \subseteq A'$.

Упражнение 1. (i) *Докажите справедливость формул* 1–9.

(ii) *Приведите примеры, показывающие, что в формулах* 1 *и* 5 *знаки импликации не могут быть заменены на знаки эквивалентности, а в формулах* 3, 8 *и* 9 *знаки включения не могут быть заменены на знаки равенства.*

Упражнение 2. *Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ – два отображения; A – произвольное подмножество множества X; A' – произвольное подмножество множества Z. Докажите, что*

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)), \quad \text{а} \quad (g \circ f)^{-1}(A') = f^{-1}(g^{-1}(A')).$$

---

[1] **Im** – первые буквы слова “образ” в языках, имеющих латинскую основу.

Свойства 2, 3, а также 6, 7 могут быть распространены с двух подмножеств на произвольные семейства подмножеств. Пусть $(A_i)_{i\in I}$ – произвольное семейство подмножеств множества X, $(A'_i)_{i\in I}$ – произвольное семейство подмножеств множества Y. Верны следующие формулы:

10. $f(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f(A_i)$.

11. $f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$.

12. $f^{-1}(\bigcup\limits_{i\in I} A'_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(A'_i)$.

13. $f^{-1}(\bigcap\limits_{i\in I} A'_i) = \bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}(A'_i)$..

Свойства 10–13 непосредственно вытекают из определений объединения и пересечения семейства множеств и определений образа и прообраза множества.

Упражнение 3. *Докажите справедливость формул* 10–13.

§ 4. ИНЪЕКТИВНЫЕ, БИЕКТИВНЫЕ И СЮРЪЕКТИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Определение 1. *Отображение* $f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$ *называется* ***инъективным*** (*или* ***инъекцией***), *если для любых* $x_1, x_2 \in X$ *из условия* $f(x_1) = f(x_2)$ *следует, что* $x_1 = x_2$.

Переходя в определении 1 к отрицаниям и пользуясь свойствами импликации, получаем еще один вариант определения инъективности отображения.

Отображение f *инъективно, если для любых* $x_1, x_2 \in X$ *из условия* $x_1 \neq x_2$ *следует, что* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Другими словами, условие инъективности означает, что различные элементы из множества X не могут иметь один и тот же образ.

Типичным примером инъективного отображения является естественное вложение $i_A : A \to X$ подмножества A в объемлющее множество X.

Упражнение 1. *Докажите, что степенная функция* $y = x^m$, $m \in \mathbf{N}$, *инъективна при нечетных* m *и неинъективна при четных* m.

Обращаясь к наглядному образу отображения как множеству стрелок, соединяющих каждый элемент $x \in X$ с его образом в множестве Y, отметим, что свойство инъективности означает следующее: никакие две различные стрелки не могут оканчиваться в одной точке (рис. 1).

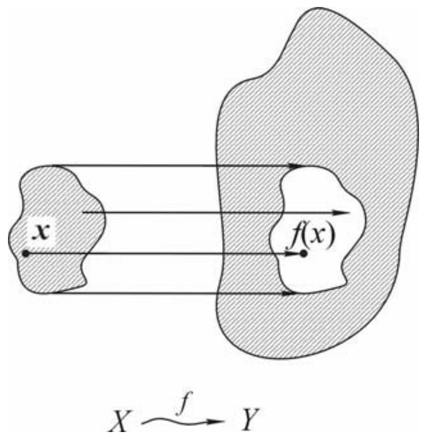

Рис. 1

Упражнение 2. (i) *Докажите, что инъективными являются следующие отображения: тождественное, линейная функция, показательная и логарифмическая функции и все геометрические преобразования, кроме проекций.*

(ii) *Выясните, при каких показателях степени* $m \in \mathbf{R}$ *степенная функция* $y = x^m$ *является инъективной.*

(iii) *Что можно сказать об инъективности i-й проекции*

$$\mathbf{pr}_i : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to X_i, \ (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto x_i$$

в декартовом произведении n множеств?

Определение 2. *Отображение* $f : X \to Y, \ x \mapsto f(x)$ *называется* ***сюръективным*** (*или* ***сюръекцией***), *если для любого элемента y множества Y существует элемент x множества X такой, что* $f(\mathrm{x}) = y$.

Другими словами, отображение $f : X \to Y$ сюръективно, если каждый элемент из множества Y имеет хотя бы один прообраз. В случае сюръективного отображения образами $f(x)$ элементов из множества X покрывается все множество Y, т. е. f отображает множество *X на все* множество Y, поэтому часто сюръективное отображение называют отображением "*на*"[1].

Наглядный образ сюръективного отображения характеризуется тем, что в каждой точке множества Y оканчивается хотя бы одна стрелка (рис. 2).

[1] Sur – предлог "на" во французском языке.

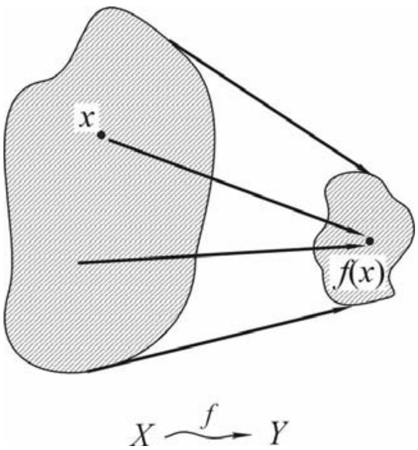

Рис. 2

Упражнение 3. (i) *Покажите, что сюръективными являются следующие отображения: тождественное, i-я проекция*

$$\mathbf{pr}_i : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to X_i,\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_i$$

в декартовом произведении n *множеств, каноническая проекция*

$$p : X \to X/{\sim},\ x \mapsto \bar{x}$$

множества X *на фактормножество* $X/{\sim}$, *линейная функция, функции* tg, ctg, *показательная и логарифмическая функции и все геометрические преобразования, за исключением проекций.*

(ii) *Выясните, при каких показателях* $m \in \mathbf{R}$ *степенная функция* $y = x^m$ *является сюръективной.*

Определение 3. *Отображение* $f : X \to Y$ *называется* ***биективным*** (*или* ***биекцией***), *если оно инъективно и сюръективно.*

При наглядном представлении отображения $f : X \to Y$ как совокупности стрелок, соединяющих элементы множества X с элементами множества Y, случай биекции характеризуется тем, что не только из каждого элемента множества X выходит одна стрелка (это имеет место для любой функции), но также и в каждый (сюръективность) элемент множества Y приходит ровно одна (инъективность) стрелка (рис. 3). Таким образом, стрелки, которые задают отображение f, разбивают элементы множеств X и Y на пары (x и $f(x)$), соответствующие друг другу.

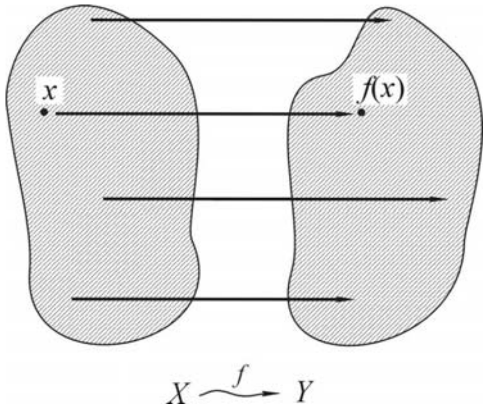

Рис. 3

При биективном отображении не только каждому элементу множества X соответствует некоторый элемент множества Y, но и наоборот, каждый элемент множества Y соответствует ровно одному элементу множества X, т. е. соответствие f является однозначным в обе стороны. Учитывая это обстоятельство, говорят, что биективное отображение устанавливает *взаимно однозначное соответствие между элементами множества X и элементами множества Y*. Такое соответствие позволяет *отождествить* множество X с множеством Y, отождествляя каждый элемент $x \in X$ с его образом: $x \equiv f(x)$. Множества X и Y могут различаться только природой своих элементов или их именами. В тех ситуациях, когда ни природа элементов, составляющих рассматриваемые множества, ни их имена значения не имеют, такое отождествление допустимо и используется.

Замечание 1. Если $f : X \to Y$ – инъективное отображение, то сужая (если f не есть биекция) область значений отображения f с множества Y до Imf – образа отображения f, получим биективное отображение X на Imf. Учитывая сказанное выше об отождествлении множеств при биекции, часто говорят, что инъективное отображение $f : X \to Y$ ***вкладывает*** множество X в множество Y, и инъективное отображение называют ***вложением***.

Например, множество $\mathbf{2N}$ четных натуральных чисел можно вложить в множество всех натуральных чисел естественным образом:

$$i_{2N} : \mathbf{2N} \to \mathbf{N},\ n \mapsto n,$$

а можно с помощью инъективного отображения:

$$f : \mathbf{2N} \to \mathbf{N},\ n \mapsto 2n.$$

Во втором случае множество четных чисел отождествляется с подмножеством натуральных чисел, кратных 4.

Как следует из упражнений 1 и 2, среди примеров отображений, приведенных в § 1, биективными являются тождественное отображение, линейная функция, показательная и логарифмическая функции, все геометрические преобразования, кроме проекций, а также степенная функция $y = x^m$ при некоторых значениях показателя m.

Теорема 1. *Композиция инъективных* (*сюръективных*, *биективных*) *отображений есть инъективное* (*соответственно сюръективное*, *биективное*) *отображение.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ – два отображения.

Допустим вначале, что f и g инъективны. Пусть x_1, x_2 – произвольные элементы множества X, для которых $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Это равенство, по определению композиции отображений, означает, что $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Так как отображение g инъективно, то из последнего равенства вытекает, что $f(x_1) = f(x_2)$, из чего в силу инъективности f следует равенство $x_1 = x_2$. Таким образом, доказано, что композиция инъективных отображений инъективна.

Допустим далее, что f и g сюръективны. Пусть z – произвольный элемент множества Z. Так как отображение g сюръективно, то для элемента z существует прообраз, т. е. такой элемент $y \in Y$, что $g(y) = z$. В свою очередь, в силу сюръективности f для элемента y существует прообраз, т. е. такой элемент $x \in X$, что $f(x) = y$. Следовательно, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$, т. е. элемент z имеет прообраз x при отображении $g \circ f$, что означает сюръективность композиции сюръективных отображений.

То, что композиция биективных отображений биективна, вытекает из доказанного и определения биективности. Теорема доказана.

Определение 4. *Пусть X и Y – два непустых множества. Множество X называется* ***равномощным*** *множеству Y, если существует биекция X на Y. Пустое множество $\varnothing$ равномощно самому себе и не равномощно никакому другому множеству.*

Тот факт, что множество X равномощно множеству Y, будем обозначать формулой

$$|X| = |Y|. \tag{1}$$

Упражнение 4. *Покажите, что отношение равномощности есть отношение эквивалентности в множестве $P(X)$ всех подмножеств произвольного множества* X.

В § 1.1 обозначение $|X|$ введено для числа элементов конечного множества X. Следующее утверждение показывает, что для конечных множеств определение 4 согласуется с равенством (1).

Утверждение 1. *Конечное множество X равномощно конечному множеству Y, если и только если X и Y содержат одинаковое число элементов.*

То, что это действительно верно, будет показано в § 4.6, где мы возвращаемся к понятию конечного множества после аксиоматического определения множества натуральных чисел **N**. В качестве следствия этого утверждения получаем, что *никакое конечное множество не равномощно своему собственному* (*т. е. не совпадающему со всем множеством*) *подмножеству.*

Учитывая утверждение 1, можно сказать, что понятие равномощности есть обобщение на произвольные множества понятия “число элементов конечного множества”. Допуская вольность речи, иногда говорят, что равномощные множества содержат “одинаковое количество” элементов. В этом контексте приведенное выше следствие означает, что конечное множество и любое его собственное подмножество содержат различное количество элементов.

В случае бесконечных множеств это не всегда так. Например, отображение $f: \mathbf{N} \to 2\mathbf{N}$, $n \mapsto 2n$ есть биекция множества **N** натуральных чисел на собственное подмножество четных натуральных чисел. Таким образом, множество натуральных чисел равномощно множеству четных чисел: $|\mathbf{N}| = |2\mathbf{N}|$.

Рассмотрим еще несколько важных примеров равномощности бесконечных множеств.

Пусть $[a; b]$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ – произвольный отрезок. Легко убедиться, что функция

$$f: [0; 1] \to [a; b],\ x \mapsto a + x(b - a)$$

есть биекция единичного отрезка $\mathrm{I} = [0; 1]$ на отрезок $[a; b]$. Итак, *любой отрезок равномощен единичному отрезку* I:

$$|[0; 1]| = |[a; b]|.$$

Отсюда следует (см. упражнение 4), что *любые два отрезка числовой оси равномощны.* Аналогично доказывается, что *любые два открытых интервала числовой оси равномощны.*

Биективная функция $f: \mathbf{R} \to (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ показывает, что множество действительных чисел **R** (или, что то же самое, числовая ось) равномощна интервалу $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Учитывая то, что любые два открытых интервала равномощны, получаем в итоге: *прямая* **R** *равномощна любому своему открытому интервалу* $(a; b)$.

Упражнение 5. (i) *Покажите, что множество натуральных чисел равномощно множеству целых чисел*: $|\mathbf{N}| = |\mathbf{Z}|$.

(ii) *Постройте биекцию отрезка* $[0; 1]$ *на интервал* $(0; 1)$.

Покажем, что произвольное отображение $f : X \to Y$ некоторым естественным образом может быть разложено в композицию сюръективного и инъективного отображений.

С помощью f на множестве X можно задать следующее отношение эквивалентности:

$$x_1 \sim_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Таким образом, два элемента множества X считаем эквивалентными, если их образы при отображении f равны. Очевидно, что $\sim_f$ действительно является отношением эквивалентности на множестве X. Класс эквивалентности $\bar{x}$ произвольного элемента $x \in X$ совпадает с полным прообразом элемента $y = f(x) \in \mathbf{Im}\, f$. Обозначим символом X/f фактормножество множества X по введенному отношению эквивалентности. По отображению f построим отображение $\bar{f} : X/f \to Y$, которое действует по закону:

$$\bar{f}(\bar{x}) = f(x) \quad \forall\, \bar{x} \in X/f.$$

В этой формуле образ класса эквивалентности $\tilde{o}$ при отображении $\bar{f}$ определяется образом представителя этого класса (элемента x) при отображении f. Поскольку класс $\bar{x}$ может содержать, помимо x, и другие элементы, следует позаботиться о корректности определения отображения $\bar{f}$. Пусть x_1 и x_2 – два элемента одного класса эквивалентности, т. е. $x_1 \sim_f x_2$. Это означает, что $f(x_1) = f(x_2)$ и, следовательно, $\bar{f}(\bar{x}_1) = \bar{f}(\bar{x}_2)$, отображение $\bar{f}$ определено корректно. Отметим, что отображение $\bar{f}$ инъективно, так как если $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$ и, следовательно, $\bar{f}(\bar{x}_1) \neq$ $\neq \bar{f}(\bar{x}_2)$. Пусть

$$p : X \to X/f, x \mapsto \bar{x} \; –$$

каноническая проекция, являющаяся, как отмечалось выше, сюръективным отображением. Очевидно, $f = \bar{f} \circ p$, отображение f представлено в виде композиции сюръективного отображения p и инъективного отображения $\bar{f}$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Каждое отображение может быть представлено как композиция сюръекции и инъекции.*

В заключение параграфа отметим следующее важное свойство булеана произвольного множества.

Теорема 3. *Ни для какого множества X не существует сюръективного отображения множества X на его булеан $P(X)$.*

Доказательство. По определению пустое множество не может быть областью определения никакого отображения. Следовательно, для пустого множества X теорема справедлива.

Предположим, что X непусто. Проведем доказательство методом “от противного”. Допустим, что существует сюръекция $f : X \to P(X)$. Для каждого элемента x множества X выполняется альтернатива: либо x принадлежит своему образу при отображении f $(x \in f(x) \subseteq X)$, либо не принадлежит $(x \notin f(x) \subseteq X)$. Рассмотрим подмножество A множества X, состоящее из тех элементов множества X, которые не принадлежат своим образам при отображении f. Таким образом,

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

По сделанному допущению отображение f сюръективно, следовательно, для подмножества A, являющегося элементом булеана $P(X)$, существует элемент $a \in X$ такой, что $f(a) = A$. Попытаемся выяснить, какая из двух альтернатив выполняется для элемента а: $a \in f(a)$ либо $a \notin f(a)$.

1) Если $a \in f(a)$, то $a \in A = f(a)$. Однако по определению, множество A состоит из элементов, не принадлежащих своему образу, т. е. $a \notin f(a)$. Пришли к противоречию с условием $a \in f(a)$.

2) Если $a \notin f(a)$, то $a \in A$ согласно определению множества A. Вновь пришли к противоречию, на этот раз с условием $a \notin f(a)$.

Таким образом, предположение о существовании сюръекции $f : X \to P(X)$ неверно, теорема доказана.

Упражнение 6. *Для каждого отображения $f : X \to Y$ с помощью операций взятия образов и прообразов множеств можно определить (индуцировать) два отображения булеанов множеств X и Y:*

$$f_* : P(X) \to P(Y),\ A \mapsto f(A) \ \text{и}\ f^* : P(Y) \to P(X),\ A' \mapsto f^{-1}(A').$$

Выясните взаимосвязь между свойством инъективности (сюръективности, биективности) исходного отображения f и индуцированных отображений булеанов f_* и f^*.

Упражнение 7. *Пусть X и Y – конечные множества, $|X| = n$, $|Y| = m$.*

(i) *При каких соотношениях между числами n и m существуют инъективные (сюръективные, биективные) отображения $f : X \to Y$?*

(ii) *Найдите число инъективных (биективных) отображений множества X в множество Y в случае, когда такие отображения существуют.*

§ 5. ОБРАТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Пусть $f : X \to Y$ – биективное отображение. Так как f сюръективно, то для каждого элемента y множества Y существует прообраз $x \in X$ (т. е. $f(x) = y$), а так как f инъективно, то этот прообраз единственный. Таким образом, в случае биективного отображения $f : X \to Y$ возникает отображение множества Y в множество X, действующее по следующему закону:

произвольному элементу $y \in Y$ *ставится в соответствие элемент* $x \in X$ *такой, что* $f(x) = y$.

Это отображение называется ***обратным*** для отображения f и обозначается f^{-1}. Итак,

$$f^{-1} : Y \to X,\ y \mapsto x,\ где\ f(x) = y.$$

На языке бинарных отношений переход от отображения $f : X \to Y$ к обратному отображению $f^{-1}: Y \to X$ означает, что от бинарного отношения

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$$

переходят к *обратному бинарному отношению*

$$f^{-1} = \{(f(x), x) \mid x \in X\} \subseteq Y \times X \quad (\text{см. § 1.8}).$$

Для биективного отображения $f : X \to Y$ (и только в этом случае) обратное бинарное отношение $f^{-1} \subseteq Y \times X$ обладает свойством функциональности, что и позволяет определить обратное отображение для f.

При графической иллюстрации отображения $f : X \to Y$ как множества стрелок, выходящих из точек множества X и оканчивающихся в точках множества Y, переход от f к f^{-1} означает замену каждой стрелки на стрелку противоположного направления (*обращение* стрелки, рис. 1).

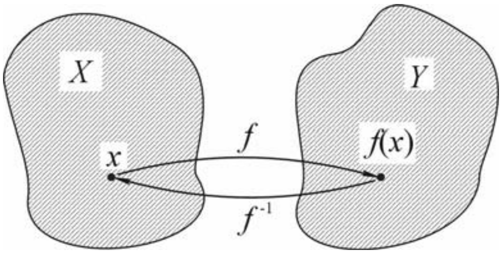

Рис. 1

Переходя к примерам, обратимся к отображениям, приведенным в § 1, выделив среди них ряд биективных отображений.

1. Отображение, обратное для тождественного отображения $\mathbf{Id} : X \to X$, $x \mapsto x$ совпадает с ним самим: $\mathbf{Id}^{-1} = \mathbf{Id}$.

2. Если $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto ax + b$, $a \neq 0$ – линейная функция, то обратной функцией для нее является также линейная функция вида $f^{-1}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{x-b}{a}$. Действительно,

$$f\left(\frac{x-b}{a}\right) = a\,\frac{x-b}{a} + b = x,$$

т. е. число $\frac{x-b}{a}$ есть прообраз числа x при действии функции f.

Нахождение обратного для отображения $f: X \to Y$ в общем случае представляет собой установление правила, по которому для каждого элемента $y \in Y$ находится его прообраз, что означает решение уравнения $y = f(x)$ относительно неизвестного x. В последнем примере уравнение имеет вид $y = ax + b$. Решение этого уравнения дается формулой $x = \frac{y-b}{a}$. Далее x и y меняются местами, поскольку аргумент функции принято обозначать буквой x.

3. Функцией, обратной для показательной функции $y = a^x$, является логарифмическая функция $y = \log_a x$ и, наоборот, для логарифмической функции $y = \log_a x$ обратной является показательная $y = a^x$.

Упражнение 1. *Убедитесь в том, что показательная и логарифмическая функции взаимно обратны. Можно ли то же самое сказать про пары* $y = \sin x$ *и* $y = \arcsin x$, $y = \cos x$ *и* $y = \arccos x$, $y = \operatorname{tg} x$ *и* $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ *и* $y = \operatorname{arcctg} x$?

4. Для параллельного переноса плоскости или пространства на вектор $\vec{a}$ обратным преобразованием является параллельный перенос на противоположный вектор $-\vec{a}$.

Для поворота плоскости на угол α в данном направлении вокруг неподвижной точки O обратным преобразованием является поворот плоскости на угол α вокруг точки O в противоположном направлении.

Для всех типов симметрий (относительно точки, прямой или плоскости), а также для инверсии обратное отображение совпадает с исходным преобразованием.

Упражнение 2. *Найдите обратное отображение для гомотетии.*

Пусть $f: X \to Y$ – биекция. Из определения обратного отображения вытекают формулы:

$$f^{-1} \circ f = \mathbf{Id}_X \quad \text{и} \quad f \circ f^{-1} = \mathbf{Id}_Y. \tag{1}$$

Действительно, действие композиции $f^{-1} \circ f$ на произвольный элемент $x \in X$ заключается в последовательном взятии образа $f(x)$ элемента x и затем нахождении прообраза для $f(x)$, которым является исходный элемент x. В результате действия композиции $f^{-1} \circ f$ произвольный элемент $x \in X$

переходит в себя, следовательно, $f^{-1} \circ f = \mathbf{Id}_X$. Вторая формула в (1) доказывается аналогичными рассуждениями. Далее будет показано, что равенства (1) могут служить на самом деле в качестве определения обратного отображения.

Определение 1. *Пусть* $f : X \to Y$ *– некоторое отображение.*

(i) *Отображение* $g : Y \to X$ *называется* ***левым обратным*** *для отображения f, если верно равенство*

$$g \circ f = \mathbf{Id}_X \tag{2}$$

(ii) *Отображение* $g : Y \to X$ *называется* ***правым обратным*** *для отображения f, если верно равенство*

$$f \circ g = \mathbf{Id}_Y. \tag{3}$$

Из определения следует, что *если отображение g – левое* (*правое*) *обратное для отображения f, то f является правым* (*левым*) *обратным для g.*

Рассмотрим несколько примеров. Первый из них показывает, что существуют отображения, для которых нет ни левых, ни правых обратных.

1. Рассмотрим функцию $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z},\ z \mapsto z^2$.

Допустим вначале, что некоторая функция $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ есть левая обратная функция для f. Тогда в силу (2) верны следующие равенства:

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1^2) = g(1) = 1,$

$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g((-1)^2) = g(1) = -1.$

Высказывание $g(1) = 1$ и $g(1) = -1$ противоречит тому, что g есть функция (у числа 1 может быть только один образ при отображении g). Следовательно, для функции f не существует левой обратной.

Допустим теперь, что некоторая функция $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ есть правая обратная функция для f. Тогда в силу (3) верны следующие равенства:

$$(f \circ g)(-4) = f(g(-4)) = (g(-4))^2 = -4.$$

Однако квадрат целого числа $g(-4)$ не может равняться -4, полученное противоречие означает, что для функции f не существует и правой обратной.

Второй пример показывает, что существуют отображения, у которых есть только односторонние обратные.

2. Пусть $X = \{1, 4, 9, \ldots\}$ – множество квадратов целых чисел. Рассмотрим функцию $f : \mathbf{Z} \to X,\ z \mapsto z^2$. Утверждение о том, что для функции f не существует левой обратной, доказывается точно так же, как в первом примере. С другой стороны, рассмотрим функцию $g : X \to \mathbf{Z}$, $x \mapsto \sqrt{x}$. Учитывая то, что каждый элемент множества X имеет вид $x = z^2$

для некоторого $z \in \mathbf{Z}$, функцию g можно задать также формулой $g(z^2) = |z|$. Пусть $x = z^2$ – произвольный элемент множества X. Тогда

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(z^2)) = f(|z|) = |z|^2 = z^2 = x.$$

Сравнивая первый и последний члены в цепочке равенств, получаем, что $f\circ g = \mathbf{Id}_X$, т. е. g есть правая обратная функция для f.

Упражнение 3. (i) *Приведите пример отображения*, *у которого есть левое обратное*, *однако нет правого обратного.*

(ii) *Покажите*, *что существуют отображения*, *у которых есть более чем одно левое* (*правое*) *обратное.*

Теорема 1. *Пусть для отображения $f : X \to Y$ существуют левое обратное отображение $g : Y \to X$ и правое обратное отображение $h : Y \to X$. Тогда f – биективное отображение и $g = h = f^{-1}$.*

Доказательство. Пусть для пары элементов $x_1, x_2 \in X$

$$f(x_1) = f(x_2). \qquad (4)$$

Но $(g\circ f)(x) = x$ для каждого $x \in X$. Поэтому равенство (4) влечет $(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2)$ и, следовательно, $x_1 = x_2$. Инъективность отображения f доказана.

Пусть теперь y – произвольный элемент множества Y. Тогда $f(h(y)) = (f\circ h)(y) = y$, т. е. $h(y)$ является прообразом элемента y при отображении f. Сюръективность отображения f доказана. Следовательно, отображение f биективно, для него существует обратное отображение f^{-1}.

Используя условия теоремы и ассоциативность композиции отображений, вычислим $g\circ f\circ f^{-1}$ двумя способами:

$$g\circ f\circ f^{-1} = (g\circ f)\circ f^{-1} = \mathbf{Id}_Y \circ f^{-1} = f^{-1},$$

$$g\circ f\circ f^{-1} = g\circ (f\circ f^{-1}) = g\circ \mathbf{Id}_X = g, \text{ т. е. } g = f^{-1}.$$

Аналогично

$$f^{-1}\circ f\circ h = (f^{-1}\circ f)\circ h = \mathbf{Id}_X\circ h = h,$$

$$f^{-1}\circ (f\circ h) = f^{-1}\circ (f\circ h) = f^{-1}\circ \mathbf{Id}_Y = f^{-1}, \text{ т. е. } h = f^{-1}.$$

Итак, $g = h = f^{-1}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $f : X \to Y$ – некоторое отображение. Отображение $g : Y \to X$ является обратным для f тогда и только тогда*, *когда верны два равенства*:

$$g\circ f = \mathbf{Id}_X \quad \text{и} \quad f\circ g = \mathbf{Id}_Y. \qquad (5)$$

Доказательство следствия 1 заключается в использовании формулы (1) и только что доказанной теоремы.

Замечание 1. С учетом следствия 1 определение обратного отображения можно дать в следующем виде: *отображение* $g : Y \to X$ *называется* ***обратным*** *для отображения* $f : X \to Y$, *если верны равенства* (5).

Следствие 2. *Пусть* $f : X \to Y$ *и* $g : Y \to Z$ *– две биекции. Тогда*

(i) $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$;

(ii) $(f^{-1})^{-1} = f$.

Доказательство. (i) Пользуемся следствием 1 и ассоциативностью композиции отображений:

$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) = f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)\circ f = f^{-1}\circ f = \mathbf{Id}_X,$$

$$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}) = g\circ(f\circ f^{-1})\circ g^{-1} = g\circ g^{-1} = \mathbf{Id}_Z.$$

Часть (ii) вытекает из следствия 1 и равенств (1).

Замечание 2. Обозначив обратное для f отображение символом f^{-1}, мы внесли в обозначения определенную двусмысленность: два разных объекта получили одно и то же обозначение. А именно $f^{-1}(y)$ для произвольного отображения $f : X \to Y$ есть полный прообраз элемента $y \in Y$, т. е. некоторое подмножество множества X. Если же f – биекция, то возникает обратное отображение f^{-1}, и $f^{-1}(y)$ обозначает также образ элемента $y\in Y$ при отображении f^{-1}, т. е. некоторый элемент множества X. В этом случае $f^{-1}(y)$ как прообраз элемента y есть некоторое одноэлементное подмножество $\{x\}$, а $f^{-1}(y)$ как образ элемента y при отображении f^{-1} есть элемент x. Так что допускаемая нами вольность заключается в отождествлении одноэлементного множества с его элементом: $\{x\} = x$. Из контекста обычно ясно, идет ли речь о множестве или об элементе, и затруднений не возникает. Отметим, что если A' – подмножество множества Y, то подобной коллизии нет. В случае биекции $f^{-1}(A')$ обозначает одно и то же подмножество множества X, идет ли речь о прообразе множества A' при отображении f, или об образе множества A' при отображении f^{-1}.

В заключение параграфа обсудим понятие *конечного* отображения, близкое в определенном смысле к понятию биективного отображения. Такие отображения играют важную роль в алгебраической геометрии. Отображение $f : X \to Y$, для которого существует обратное отображение $f^{-1} : Y \to X$, называют *обратимым* отображением. Выше мы установили, что отображение f обратимо тогда и только тогда, когда оно биективно. В таком случае для любого элемента $y\in Y$ его полный прообраз $f^{-1}(y)$ есть одноэлементное множество. Следующее определение обобщает эту ситуацию.

Определение 2. *Пусть* $f : X \to Y$ *– некоторое отображение,* $y \in Y$*,* W *– непустое подмножество множества* Y*.*

(i) *Отображение* f *называется* ***обратимым в элементе*** $y \in Y$*, если полный прообраз* $f^{-1}(y)$ *есть одноэлементное множество.*

(ii) *Отображение* f *называется* ***обратимым на множестве*** W*, если оно обратимо в каждом элементе множества* W*.*

Очевидно, что отображение $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, обратимое на всем множестве Y, является обратимым отображением, т. е. биекцией. Отображения, обладающие тем свойством, что прообразы элементов из их областей значений суть бесконечные множества, должны по своим свойствам сильно отличаться от обратимых отображений. Промежуточное положение занимают отображения с конечными прообразами. Такие отображения называются ***конечными***. Важными примерами конечных отображений являются полиномиальные функции положительной степени, т. е. отображения вида

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – фиксированные вещественные числа, $a_n \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$.

Конечность этих отображений вытекает из следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $f(x)$ *– полиномиальная функция положительной степени и пусть* $b \in \mathbf{R}$*. Тогда число решений уравнения*

$$f(x) = b \tag{6}$$

не превосходит степени функции $f(x)$*.*

Доказательство. Переходя от полиномиальной функции $f(x)$ к функции $f(x) - b$, которая является также полиномиальной и имеет такую же степень, как и $f(x)$, можем считать, что уравнение (6) имеет вид

$$f(x) = 0. \tag{7}$$

Далее проводим доказательство методом математической индукции. Отметим, что утверждение теоремы справедливо для линейной функции, т. е. если степень $f(x)$ равна 1. Действительно, уравнение $a_1 x + a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$, имеет одно решение.

Пусть теперь теорема доказана для функций, степень которых равна некоторому натуральному числу k. Покажем, что тогда теорема справедлива для функций степени $k + 1$. Пусть $f(x)$ – полиномиальная функция степени $k + 1$. Если уравнение (7) не имеет решений, то доказывать нечего. Если же $c \in \mathbf{R}$ – решение уравнения (7), то, как доказывается в курсе алгебры,

$$f(x) = (x - c)\, g(x)$$

и степень многочлена $g(x)$ равна k. По предположению индукции теперь получаем, что число решений уравнения (7) не превосходит $k + 1$. Теорема доказана.

Итак, для полиномиальной функции f положительной степени множество $f^{-1}(b)$ конечно для любого $b \in \mathbf{R}$. На самом деле можно получить более точную информацию о прообразах $f^{-1}(b)$. Заинтересованному читателю, знакомому из курса математического анализа с понятием непрерывной функции, мы рекомендуем обратиться к следующему упражнению.

Упражнение 4. (i) *Если f – полиномиальная функция нечетной степени, то существует такое число $B \in \mathbf{R}$, что для всех $b \in \mathbf{R}$, $|b| > B$ полный прообраз $f^{-1}(b)$ есть одноэлементное множество.*

(ii) *Если f – полиномиальная функция четной положительной степени, то существует такое число $B \in \mathbf{R}$, что:*

либо для всех $b \in \mathbf{R}$, $b > B$ полный прообраз $f^{-1}(b)$ есть двухэлементное множество;

либо для всех $b \in \mathbf{R}$, $b < B$ полный прообраз $f^{-1}(b)$ есть двухэлементное множество.

§ 6. ДЕКАРТОВЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МНОЖЕСТВ, АКСИОМА ВЫБОРА И ОДНОСТОРОННИЕ ОБРАТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Напомним, что n-й декартовой степенью множества X называется множество $X \times X \times \ldots \times X = X^n$ всех последовательностей длины n элементов множества X:

$$X^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in X\}.$$

В § 1 произвольная последовательность $(x_1, x_2, ..., x_n)$ интерпретировалась как функция

$$x : \mathbf{S}_n \to X, \quad \text{где } \mathbf{S}_n = \{1, 2, ..., n\} \;\; x(i) = x_i, \tag{1}$$

а декартова степень X^n множества X рассматривалась в соответствии с этой интерпретацией как множество всех функций вида (1).

Декартово произведение $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ n произвольных непустых множеств можно также трактовать как множество функций некоторого специального типа. А именно: положим $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$. Рассмотрим функцию

$$x : \mathbf{S}_n \to X \text{ такую, что } x(1) \in X_1,\; x(2) \in X_2, ...,\; x(n) \in X_n. \tag{2}$$

Если образ $x(i)$ любого элемента $i \in S_n$ обозначить, как и выше, знаком x_i, то функция x определяет набор $(x_1, x_2, ..., x_n)$, т. е. элемент декартова произведения $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

Обратно, каждый упорядоченный набор $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_i \in X_i$, однозначно определяет функцию вида (2). Наши рассуждения доказывают следующее утверждение.

Утверждение 1. *Декартово произведение* $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ *n множеств совпадает с множеством всех функций*

$$x : \{1, 2, ..., n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} X_i$$

таких, что $x(i) \in X_i$ *для любого* $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Такой взгляд на декартово произведение $\prod_{i=1}^{n} X_i$ позволяет распространить это понятие с конечного на произвольное семейство множеств.

Определение 1. Декартовым (*или* ***прямым***) ***произведением семейства множеств*** $(X_i)_{i \in I}$ *называется множество всех функций*

$$x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i, \quad i \mapsto x_i, \quad \text{таких, что} \ \forall \ i \in I \ \ x(i) = x_i \in X_i \qquad (3)$$

Декартово произведение множеств обозначается символом $\prod_{i \in I} X_i$. Очевидно, что если хотя бы для одного индекса $i_0 \in I$ множество X_{i_0} пустое, то декартово произведение $\prod_{i \in I} X_i$ также пустое множество, поскольку никакую функцию вида (3) определить нельзя (индексу i_0 не может соответствовать никакой элемент).

Пусть теперь каждое из множеств X_i семейства непустое. Что можно сказать в этом случае о декартовом произведении? Если речь идет о декартовом произведении $X_1 \times X_2$ двух непустых множеств, то представляется очевидной возможность выбора в каждом из множеств по одному элементу: $a \in X_1$, $b \in X_2$. После этого можно определить функцию $x : \{1, 2\} \to$ $\to X_1 \bigcup X_2$, положив $x(1) = a$, $x(2) = b$. Очевидно, $x \in X_1 \times X_2$, следовательно, декартово произведение $X_1 \times X_2$ непусто.

Можем ли мы аналогичным образом определить элемент декартова произведения

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \times \ldots \qquad (4)$$

бесконечной последовательности непустых множеств? Здесь множество индексов I есть множество натуральных чисел $\mathbf{N}$. Для задания функции x с областью определения $\mathbf{N}$ требуется для каждого натурального числа n

указать его образ $x(n)$, который должен принадлежать множеству X_n. Это несложно сделать, если каждое из множеств X_n является подмножеством множества натуральных чисел. Действительно, в этой ситуации в каждом X_n имеется наименьшее число и именно его можно взять в качестве $x(n)$:

$$x(n) = \min \{x \mid x \in X_n\}.$$

Построена функция $x : \mathbf{N} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, причем $x(n) \in X_n$.

Но как быть в случае, когда множества в декартовом произведении произвольные? Можем ли мы сначала выбрать элемент a_1 в X_1, затем a_2 в X_2 и т. д.? Имеется ли возможность бесконечного повтора выбора? Есть ли у нас время на это?

Подобные вопросы вызывают затруднение. В связи с этим обстоятельством Э. Цермело[1)] предложил следующую аксиому (1904 г.), которую мы используем в канторовой теории множеств и которая входит также в систему **ZF** (см. § 8).

Аксиома выбора. *Пусть X – произвольное непустое множество, $P^*(X)$ – множество всех его непустых подмножеств. Тогда существует отображение $\varphi : P^*(X) \to X$, которое каждому множеству A из $P^*(X)$ ставит в соответствие некоторый элемент $\varphi(A)$ множества A.*

Отображение φ из аксиомы выбора называется ***функцией выбора*** для множества X. Обозначим эту функцию φ_X. Говорят, что функция выбора φ_X *в каждом непустом подмножестве* A *множества X выбирает один элемент* $\varphi_X(A)$.

Мы можем считать утверждение этой аксиомы очевидным, но можем иметь и другую точку зрения по этому поводу. В любом случае важность и полезность аксиомы выбора можно мотивировать следующими обстоятельствами:

1) аксиома выбора не противоречит нашей интуиции;

2) доказательства большого числа теорем теории множеств и математического анализа опираются на аксиому выбора (в явной или неявной форме)[2)];

3) ряд важных следствий аксиомы выбора математики не умеют доказывать без ее использования, хотя многие следствия аксиомы выбора доказаны и без ее использования.

[1)] Э. Цермело (1871–1953) – немецкий математик.

[2)] Например, доказываемая в курсе математического анализа эквивалентность двух определений непрерывности функции в точке (определение через пределы последовательностей и $\varepsilon-\delta$-определение) опирается на аксиому выбора.

Известно несколько других важных утверждений, эквивалентных аксиоме выбора[1]. Аксиому выбора часто формулируют в виде следующего утверждения.

Утверждение 2. *Декартово произведение произвольного семейства непустых множеств непусто.*

Очевидно, это утверждение вытекает из аксиомы выбора. Действительно, пусть $(X_i)_{i\in I}$ – семейство непустых множеств, X – объединение этого семейства и φ_X – некоторая функция выбора для множества X. Положив

$$x(i) = \varphi_X(X_i) \quad \forall \;\; i\in I,$$

получим отображение $x : I \to X$, являющееся, согласно определению 1, элементом декартова произведения $\prod_{i\in I} X_i$. С другой стороны, очевидно, что любой элемент декартова произведения семейства всех непустых подмножеств множества X является функцией выбора для X. Тем самым показано, что аксиома выбора и утверждение 2 эквивалентны.

Сейчас мы принимаем аксиому выбора, *в остальном оставаясь в рамках наивной теории множеств.*

Обратимся еще раз к односторонним обратным для отображения $f: X \to Y$ и обсудим условия, при которых существует одно из них (необходимое и достаточное условие существования обоих мы уже знаем – это биективность отображения f).

Теорема 1. *Для отображения f существует левое обратное*, *если и только если f инъективно.*

Доказательство. Для доказательства необходимости дословно повторим начало доказательства теоремы 5.1. Пусть для $f: X \to Y$ существует левое обратное отображение g и пусть для пары элементов $x_1, x_2 \in X$

$$f(x_1) = f(x_2). \tag{5}$$

По определению левого обратного $g\circ f = \mathbf{Id}_X$, т. е.

$$(g\circ f)(x) = \mathbf{Id}_X(x) = x \text{ для каждого } x\in X.$$

Поэтому равенство (5) влечет $(g\circ f)(x_1) = (g\circ f)(x_2)$ и, следовательно, $x_1 =$ $= x_2$. Инъективность отображения f доказана.

Достаточность. Пусть f инъективно. Выделим в X какой-нибудь элемент a и определим отображение $g : Y \to X$ условием:

$$g(y) = \begin{cases} x, \text{ если } y = f(x), \\ a, \text{ если полный прообраз } f^{-1}(y) \text{ пуст}. \end{cases}$$

[1] См., например: Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М., 1973.

Отображение g определено корректно, поскольку в силу инъективности отображения f для любого $y \in Y$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ либо пуст, либо содержит ровно один элемент. Теперь убедимся, что g есть левое обратное отображение для f. Имеем: $(g \circ f)(x) = g\,(f(x)) = x$ для любого $x \in X$, т. е. $g \circ f = \mathbf{Id}_X$. Теорема доказана.

Приняв аксиому выбора, мы легко докажем аналогичный критерий существования правого обратного отображения.

Теорема 2. *Для отображения f существует правое обратное, если и только если f сюръективно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть для отображения $f : X \to Y$ существует правое обратное отображение g и пусть y – произвольный элемент множества Y. Тогда $f(g(y)) = (f \circ g)(y) = \mathbf{Id}_Y(y) = y$, т. е. элемент $g\,(y)$ является прообразом y при отображении f. Сюръективность отображения f доказана. (Аксиома выбора здесь не использована.)

Доказательство достаточности свойства сюръективности для существования правого обратного отображения опирается на аксиому выбора. Пусть $f : X \to Y$ – некоторая сюръекция и пусть $\varphi_X : P^*(X) \to X$ – функция выбора для множества X. Тогда для любого элемента $y \in Y$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ непуст, т. е. $f^{-1}(y) \in P^*(X)$. Поэтому можно определить отображение $g : Y \to X$ условием

$$g(y) = \varphi_X(f^{-1}(y)).$$

Далее имеем: $(f \circ g)(y) = (f(g(y)) = f(\varphi_X(f^{-1}(y)) = y$, $f \circ g = \mathbf{Id}_Y$. Следовательно, отображение g является правым обратным для f. Теорема доказана.

Аксиома выбора, в свою очередь, сама может быть выведена из предыдущей теоремы 2. Точнее говоря, верна следующая теорема.

Теорема 3[1]. *Следующие два условия эквивалентны*:

(i) *для любого непустого множества существует функция выбора*;

(ii) *для каждого сюръективного отображения существует правое обратное*.

Доказательство. Истинность импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) доказана выше (теорема 2, достаточность). Докажем импликацию (ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть для каждого сюръективного отображения существует правое обратное. Для произвольного непустого множества X рассмотрим декартово произведение $P^*(X) \times X = \{(Y, x) \mid \varnothing \neq Y \subseteq X,\ x \in X\}$. В этом произведении выделим подмножество C_X, указав для него характеристическое свойство:

$$(Y, x) \in C_X \iff x \in Y.$$

Таким образом,

---

[1] Эту теорему сформулировал и доказал студент I курса (1999–2000 учебный год) механико-математического факультета БГУ Максим Бояренко.

$$C_X = \{(Y, x) \mid \varnothing \neq Y \subseteq X,\ x \in Y\}.$$

Для определения декартова произведения и выделения подмножества C_X не требуется аксиома выбора. Рассмотрим отображение f, являющееся ограничением на множество C_X первой проекции в декартовом произведении $P^*(X)\times X$, т. е.

$$f : C_X \to P^*(X),\ (Y, x) \mapsto Y. \qquad (6)$$

Так как $\varnothing \notin P^*(X)$, то для каждого $Y \in P^*(X)$ существует пара $(Y, x) \in C_X$ и, следовательно, $f((Y, x)) = Y$. Значит, f – сюръекция. Пусть $g : P^*(X) \to C_X$ – правое обратное для f отображение. Определим еще отображение h, которое является ограничением на множество C_X второй проекции в декартовом произведении $P^*(X) \times X$, т. е.

$$h : C_X \to X, (Y, x) \mapsto x.$$

Композиция $\varphi = h \circ g : P^*(X) \to X$ оказывается функцией выбора для X. Действительно, пусть $Z \in P^*(X)$ и $g(Z) = (Z', z)$, $z \in Z'$. Так как $f \circ g = \mathbf{Id}_{P^*(X)}$, то

$$Z = (f \circ g)(Z) = f(g(Z)) = f((Z', z)) = Z',$$

т. е. $g(Z) = (Z, z), z \in Z$ и, следовательно,

$$\varphi(Z) = h(g\,(Z)) = h((Z, z)) == z \in Z.$$

Теорема доказана.

§ 7. БИНАРНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

В этом параграфе рассматриваются отображения специального вида, которые играют важную роль в математике и обобщают операции сложения и умножения чисел. Здесь X обозначает некоторое непустое множество.

Определение 1. Бинарной алгебраической операцией *на множестве X называется любое отображение $f : X\times X \to X$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ декартова квадрата $X\times X$ в множество X.*

Для обозначения произвольной бинарной алгебраической операции вместо f удобно использовать какой-нибудь символ, напоминающий знаки арифметических операций, например, $*$. Образ $*(x, y)$ упорядоченной пары (x, y) при отображении $*$ записывается в виде $x*y$ и называется ***композицией*** элемента x и элемента y. Отображение $*$ называют также ***законом композиции*** на множестве X. Итак, *бинарная алгебраическая операция* на множестве X или *закон композиции* на X – это любое отображение вида

$$* : X\times X \to X,\ (x, y) \mapsto x*y.$$

Примеры. **1.** Прежде всего, примерами бинарных алгебраических операций служат сложение и умножение на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$:

$$+ : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}, (n, m) \mapsto n + m;$$
$$\cdot : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}, (n, m) \mapsto n \cdot m.$$

Отметим, что операции сложения и умножения, кроме множества $\mathbf{N}$, определены и на других числовых множествах, например на множестве $\mathbf{Z}$ целых чисел, на множестве $\mathbf{Q}$ рациональных чисел, на множестве $\mathbf{R}$ вещественных чисел.

Упражнение 1. (i) *Приведите примеры числовых множеств, на которых вычитание чисел является бинарной алгебраической операцией.*

(ii) *Приведите примеры числовых множеств, на которых деление чисел является бинарной алгебраической операцией.*

(iii) *Докажите, что формула* $(n, m) \mapsto \dfrac{1}{2}(n^2 + m^2)$ *задает бинарную алгебраическую операцию на множестве* $2\mathbf{N}$ *четных натуральных чисел, а также на множестве* $2\mathbf{N} + 1$ *нечетных натуральных чисел.*

2. Еще одним важным примером бинарной алгебраической операции является определенная в § 2 операция композиции отображений на множестве $F(X)$ всех преобразований данного множества X:

$$F(X)\times F(X) \to F(X), \ (f, g) \mapsto f\circ g.$$

Как показывает теорема 2.4, операция композиции отображений остается бинарной алгебраической операцией и при сужении множества $F(X)$ до множеств: $IF(X)$ всех инъективных преобразований множества X; $\mathrm{S}F(X)$ всех сюръективных преобразований множества X; $BF(X)$ всех биективных преобразований множества X.

3. Операции объединения и пересечения множеств являются примерами бинарных алгебраических операций на булеане $P(X)$ данного множества X.

4. Важными примерами алгебраических операций являются различные операции на множествах *матриц*.

Определение 2. *Пусть* m *и* n *– натуральные числа.* ***Матрицей с*** m***-строками и*** n***-столбцами*** ($(m\times n)$***-матрицей***) *называется конечное множество* A, *содержащее* mn *элементов, расположенных в виде таблицы, имеющей* m *строк и* n *столбцов*:

$$A = \left[\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \hdashline a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{array}\right].$$

Элемент матрицы A, стоящий в i-й строке и j-м столбце (*занимающий позицию* (i, j)), обозначается a_{ij}, а матрица A – символом (a_{ij}). Матрица, имеющая равное число строк и столбцов ($(n\times n)$-матрица), называется ***квадратной матрицей порядка*** n.

Детально матрицы и операции над ними рассматриваются в курсе линейной алгебры. При первом чтении для знакомства с матрицами можно ограничиться квадратными матрицами второго порядка, элементами которых являются действительные числа. Множество всех таких матриц обозначим $M_2(\mathbf{R})$. Итак,

$$M_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbf{R} \right\}.$$

Определим на множестве $M_2(\mathbf{R})$ операции сложения и умножения матриц. Пусть

$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ и $B = (b_{ij}) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ – произвольные матрицы. Положим:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix};\ AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

В символьной форме определение (1) сложения и умножения матриц выглядит следующим образом:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (c_{ij}),\ \text{где}\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij};\ (a_{ij})\,(b_{ij}) = (d_{ij}),\ \text{где}\ d_{ij} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj} \quad (1')$$

Замечание 1. (i) Отметим, что по формулам (1′) (считая, что индекс суммирования в последнем равенстве изменяется от 1 до n) определяются операции сложения и умножения и на множестве $M_n(\mathbf{R})$ всех квадратных матриц порядка n с действительными элементами, $n\in\mathbf{N}$. Неформально правила сложения и умножения $(n\times n)$-матриц формулируются так:

– чтобы получить элемент, занимающий некоторую фиксированную позицию суммы двух матриц, нужно сложить соответствующие элементы матриц-слагаемых;

– получить элемент, занимающий позицию (i, j) в матрице, являющейся произведением двух матриц, нужно сначала в первой перемножаемой матрице выбрать i-ю строку, во второй – j-й столбец, затем для каждого $k \in \{1, 2, ..., n\}$ умножить k-й элемент выбранной строки на k-й элемент выбранного столбца и, наконец, сложить полученные n чисел.

(ii) Отметим также, что переход от множества действительных чисел **R** к множеству $M_n(\mathbf{R})$ квадратных матриц порядка n есть процесс обобщения, так как множество $M_1(\mathbf{R})$ совпадает с множеством **R**, и формулы (1′) при $n = 1$ задают обычные операции сложения и умножения чисел.

Матрица, все элементы которой равны числу 0, называется ***нулевой*** матрицей. Квадратную нулевую матрицу будем обозначать символом 0_n или просто 0, отмечая в последнем случае там, где это необходимо, что речь идет о матрице, а не о числе. Квадратная матрица порядка n, у которой равны 1 все элементы с совпадающими номерами строк и столбцов, а все остальные элементы равны 0, называется ***единичной*** матрицей порядка n. Такая матрица обозначается E_n. При $n = 2$ имеем:

$$0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Определим еще одну бинарную алгебраическую операцию на множестве квадратных матриц. Эта операция называется ***скобкой Ли***[1)], обозначается символом [,] и определяется на основе операций сложения и умножения матриц следующим образом:

$$[\;,\;] : M_2(\mathbf{R})\times M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R}), \; (A, B) \mapsto AB - BA. \qquad (2)$$

Разность двух матриц, записанная в формуле (2), определяется естественным образом как матрица, каждый элемент которой есть разность соответствующих элементов первой и второй матриц.

Важным отображением, связанным с квадратными матрицами, является ***определитель***. Определитель для квадратных матриц порядка 2 задается формулой:

$$\det : M_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}, \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mapsto a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Матрица $A \in M_2(\mathbf{R})$ такая, что $\det(A) \neq 0$, т. е. имеющая ненулевой определитель, называется ***невырожденной матрицей***. Множество всех невырожденных матриц порядка 2 обозначается $GL(2, \mathbf{R})$.

Упражнение 2. *Проверьте, что определитель обладает следующим свойством*:

$$\forall \; A, B \in M_2(\mathbf{R}) \quad \det(AB) = \det(A)\det(B). \qquad (3)$$

Покажите, что из свойства (3) *следует, что умножение матриц есть бинарная алгебраическая операция на множестве* $GL(2, \mathbf{R})$.

[1)] Софус Ли (1842–1899) – норвежский математик, основоположник раздела математики, который сейчас называется “Теория групп Ли и алгебр Ли”.

Замечание 2. Наряду с бинарными алгебраическими операциями встречаются также *унарные*, *тернарные*, ..., *n-арные* алгебраические операции. Для любого натурального числа n *n-арная алгебраическая операция* на множестве X определяется как отображение вида

$$X \times X \times \ldots \times X = X^n \to X.$$

Отметим, что унарная ($n = 1$) алгебраическая операция на множестве X есть не что иное, как преобразование множества X.

В данном параграфе будут рассматриваться только бинарные алгебраические операции, поэтому далее термин “бинарная алгебраическая операция” заменим на более короткий “алгебраическая операция”.

Символом $(X, *)$ будем обозначать произвольное множество X с заданной на нем алгебраической операцией $*$.

Определение 3. *Пусть* $(X, *)$ *и* $(Y, \circ)$ *– два множества с заданными на них алгебраическими операциями. Отображение* $f : X \to Y$ *называется* ***изоморфизмом*** *множества* X *с операцией* $*$ *на множество* Y *с операцией* $\circ$, *если*:

(i) f *– биекция*;

(ii) *отображение* f *сохраняет операции*, т. е.

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f(x_1 * x_2) = f(x_1) \circ f(x_2).$$

Множество $(X, *)$ *называется* ***изоморфным*** *множеству* $(Y, \circ)$, *если существует изоморфизм первого из них на второе.*

Тот факт, что $(X, *)$ изоморфно $(Y, \circ)$, записывается в виде $(X, *) \cong$ $\cong (Y, \circ)$. Смысл изоморфизма заключается в следующем. Отображение f, как любая биекция, устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами X и Y, т. е. отождествляет множества X и Y. Кроме того, условие (ii) показывает, что с учетом этого отождествления законы композиции в X и Y одинаковы. Таким образом, изоморфные множества с алгебраическими операциями устроены одинаково, их можно не различать в тех ситуациях, когда изучаются формальные свойства операций. В таких случаях природа рассматриваемых множеств, как и конкретный смысл рассматриваемых операций, несущественны.

В качестве важного примера изоморфных множеств с алгебраическими операциями рассмотрим множество действительных чисел с операцией сложения $(\mathbf{R}, +)$ и множество положительных действительных чисел с операцией умножения $(\mathbf{R}^+, \cdot)$. В качестве изоморфизма $(\mathbf{R}, +)$ на $(\mathbf{R}^+, \cdot)$ можно взять показательную функцию:

$$\exp_a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+, \; x \mapsto a^x.$$

Действительно, в § 4 отмечалось, что это отображение есть биекция. Кроме того, для любых $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ имеем:

$$\exp_a(x_1 + x_2) = a^{x_1+x_2} = a^{x_1}a^{x_2} = \exp_a(x_1)\exp_a(x_2).$$

Таким образом, $(\mathbf{R}, +) \cong (\mathbf{R}^+, \cdot)$.

Упражнение 3. *Покажите, что отношение изоморфизма есть отношение эквивалентности.*

Упражнение 4. *Пусть m – фиксированное натуральное число;*
$m\mathbf{N} = \{mn \mid n\in\mathbf{N}\}$ *– множество натуральных чисел, кратных числу m;*
$m\mathbf{Z} = \{mz \mid z\in\mathbf{Z}\}$ *– множество целых чисел, кратных числу m.*
Покажите, что

$$(\mathbf{N}, +) \cong (\mathbf{mN}, +),\ (\mathbf{Z}, +) \cong (\mathbf{mZ}, +).$$

Замечание 3. Множество X, рассматриваемое вместе с одной или несколькими алгебраическими операциями, называется ***алгебраической системой***. Алгебраическая система записывается в виде $(X, *_1, *_2, \ldots, *_n)$, где $*_1, *_2, \ldots, *_n$ – список всех рассматриваемых операций. Множество X иногда называется *носителем* алгебраической системы. Важнейшими примерами алгебраических систем являются *группа*, *полугруппа*, *кольцо и поле*, определяемые ниже в этом параграфе. Для алгебраических систем с равным числом алгебраических операций естественно вводится понятие *изоморфизма* как биекции между их носителями, сохраняющей каждую операцию. Изучением алгебраических систем занимается раздел математики, который называется ***алгеброй***.

Рассмотрим один из распространенных способов задания алгебраической операции, который называется ***перенесением с помощью биекции***.

Теорема 1. *Пусть X – множество с заданной на нем алгебраической операцией $*$ и пусть $f: X \to Y$ – некоторая биекция. Тогда на множестве Y существует единственная алгебраическая операция $\circ$ такая, что f есть изоморфизм $(X, *)$ на $(Y, \circ)$.*

Доказательство. Для любых $y_1, y_2\in Y$ определим их композицию по формуле:

$$y_1\circ y_2 = f(f^{-1}(y_1)*f^{-1}(y_2)).$$

Поскольку f биекция, последняя формула для каждой пары элементов $y_1, y_2\in Y$ единственным образом определяет некоторый элемент $y_1\circ y_2\in Y$, т. е. задает алгебраическую операцию на множестве Y. Пусть x_1, x_2 – произвольные элементы множества X. Тогда

$$f(x_1)\circ f(x_2) = f(f^{-1}(f(x_1))* f^{-1}(f(x_2))) = f(x_1 * x_2),$$

что означает, что f есть изоморфизм $(X, *)$ на $(Y, \circ)$. Если $\tilde{\circ}$ – другая алгебраическая операция на множестве Y такая, что f есть изоморфизм $(X, *)$ на $(Y, \tilde{\circ})$, то

$$y_1 \tilde{\circ} y_2 = f(f^{-1}(y_1))\tilde{\circ} f(f^{-1}(y_2)) = f(f^{-1}(y_1)*(f^{-1}(y_2)) = y_1\circ y_2.$$

Теорема доказана.

С помощью биекции

$$f : X \to Y \tag{4}$$

можно переносить с множества X на множество Y не только алгебраические операции, но и любые другие *структуры*, заданные в множестве X. Чтобы не усложнять изложение, мы не определяем понятие структуры в общем виде. Отметим только, что под структурой в множестве X можно понимать выделенный (фиксированный) *элемент* $x_0 \in X$, выделенное *подмножество* $A \subseteq X$, заданное *отображение* $\alpha : X \to X$ и т. д. С помощью биекции (4) легко перенести с множества X на множество Y элемент или подмножество: получаем соответственно $y_0 = f(x_0) \in Y$ и $B = f(A) \subseteq Y$. Немного сложнее понять, как переносится отображение. Отображение, которое называется *переносом* α *с* X *на* Y *помощью биекции* (4), задается формулой:

$$\beta\colon Y \to Y, y \mapsto f(\alpha(f^{-1}(y))).$$

Можно также сказать, что β – единственное отображение, для которого коммутативна диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "\beta"] & Y
\end{tikzcd}$$

Рис. 1

Определение 4. (i) *Алгебраическая операция* $*$ *на множестве* X *называется* ***ассоциативной****, если для любых элементов* x, y, $z \in X$ *верно равенство*

$$(x * y) * z = x * (y * z).$$

(ii) *Алгебраическая операция* $*$ *на множестве* X *называется* ***коммутативной****, если для любых элементов* x, $y \in X$ *верно равенство*

$$x * y = y * x.$$

Хорошо известно, что сложение и умножение чисел ассоциативны и коммутативны; в § 1.4 отмечено, что объединение и пересечение множеств также являются ассоциативными и коммутативными алгебраическими операциями; в § 2 показано, что композиция отображений ассоциативна, но не коммутативна.

Упражнение 5. (i) *Докажите, что сложение матриц коммутативно и ассоциативно.*

(ii) *Докажите, что умножение матриц ассоциативно, но некоммутативно* (*при* $n > 1$).

(iii) *Докажите, что скобка Ли матриц* [,] *некоммутативна и не ассоциативна. В случае скобки Ли эти свойства заменяются на следующие*:

$[A, B] = -[B, A] \quad \forall\ A, B \in M_2(\mathbf{R})$ (***антикоммутативность***);

$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0 \quad \forall\ A, B, C \in M_2(\mathbf{R})$ (***тождество Якоби*** [1]).

Докажите, что скобка Ли антикоммутативна и удовлетворяет тождеству Якоби (*в правой части тождества Якоби стоит нулевая матрица*).

Определение 5. *Множество с заданной на нем ассоциативной алгебраической операцией называется* ***полугруппой.***

Все вышеприведенные примеры множеств с алгебраическими операциями, кроме ($M_2(\mathbf{R})$, [,]) есть примеры полугрупп.

Определение 6. *Элемент* $e \in (X, *)$ *называется* ***нейтральным*** *элементом относительно данной алгебраической операции, если для любого* $x \in X$ *верны равенства*:

$$x * e = e * x = x.$$

Очевидно, что число 0 есть нейтральный элемент относительно операции сложения в любом числовом множестве, на котором операция сложения чисел определена и которое содержит 0, например в множествах **Z**, **Q**, **R**. Число 1 есть нейтральный элемент относительно операции умножения в любом числовом множестве, на котором определено умножение и которое содержит 1, в частности в множествах **N**, **Z**, **Q**, **R.** В множестве (**N**, +) нет нейтрального элемента. Очевидно также, что $\varnothing$ и X есть нейтральные элементы относительно операций соответственно $\bigcup$ и $\bigcap$ на булеане $P(X)$. Тождественное отображение $\mathbf{Id}_X$ есть нейтральный элемент относительно композиции отображений в любом множестве преобразований множества X, на котором определена композиция отображений и которое содержит $\mathbf{Id}_X$.

Упражнение 6. (i) *Проверьте, что* 0_2 *и* E_2 *– нейтральные элементы соответственно относительно сложения и умножения матриц на множестве* $M_2(\mathbf{R})$.

(ii) *Докажите, что в множестве* ($M_2(\mathbf{R})$, [,]) *нет нейтрального элемента.*

Замечание 4. Часто произвольную коммутативную алгебраическую операцию (а не только сложение чисел) обозначают знаком “+” и называют *сложением*, а нейтральный элемент относительно этой операции

[1] Карл Гюстав Якоб Якоби (1804–1851) – немецкий математик.

(если он существует) обозначают “0” и называют *нулем.* В этом случае говорят, что используется *аддитивная запись* алгебраической операции. В случае произвольной алгебраической операции иногда используется *мультипликативная запись*: композиция двух произвольных элементов $x * y$ обозначается $x \cdot y$ или просто xy и называется *произведением* элемента x на элемент y, нейтральный элемент в этом случае называют *единичным* элементом или просто *единицей* и обозначают “1”.

Утверждение 1. *Относительно любой алгебраической операции существует не более одного нейтрального элемента.*

Доказательство. Если в множестве X нет нейтральных элементов, то доказывать нечего.

Допустим, что в X есть нейтральные элементы. Зафиксируем один из них – e. Пусть e' – произвольный нейтральный элемент. Тогда, с одной стороны, элемент $e * e'$ равен e, так как e' нейтральный элемент. С другой стороны, этот же элемент равен e', так как e нейтральный элемент. Итак, $e' = e$, нейтральный элемент в X единственный.

Утверждение 2. *Пусть* $(X, *)$ *и* $(Y, \circ)$ *– два множества с заданными на них алгебраическими операциями. Если* $f : X \to Y$ *– изоморфизм* $(X, *)$ *на* $(Y, \circ)$ *и* e *– нейтральный элемент в* $(X, *)$, *то* $f(e)$ *является нейтральным элементом в* $(Y, \circ)$.

Доказательство. Пусть y – произвольный элемент Y. Тогда поскольку отображение f биективно, то $y = f(x)$ для некоторого $x \in X$. Верны следующие равенства:

$$y \circ f(e) = f(x) \circ f(e) = f(x * e) = f(x) = y,$$

$$f(e) \circ y = f(e) \circ f(x) = f(e * x) = f(x) = y,$$

что и доказывает справедливость утверждения.

Из доказанного утверждения очевидно следует, что *в изоморфных множествах с алгебраическими операциями одновременно либо существуют, либо не существуют нейтральные элементы и что любой изоморфизм нейтральные элементы переводит друг в друга.*

Определение 7. *Пусть* $(X, *)$ *множество с алгебраической операцией, относительно которой имеется нейтральный элемент* e.

(i) *Элемент* $x' \in X$ *называется* ***симметричным*** *для данного элемента* $x \in X$, *если верны равенства*:

$$x * x' = x' * x = e.$$

(ii) *Элемент* $x' \in X$ *называется* ***левым симметричным*** *для данного элемента* $x \in X$, *если верно равенство*

$$x' * x = e.$$

(iii) *Элемент $x'\in X$ называется* ***правым симметричным*** *для данного элемента $x\in X$, если верно равенство*

$$x * x' = e.$$

Отметим, что для коммутативной алгебраической операции все три определенных выше понятия совпадают.

Пусть X – некоторое множество действительных чисел, для которого определена операция сложения и $0\in X$. Если данное число $x\in X$ имеет симметричный элемент x', то $x + x' = 0$, т е. $x' = -x$ – число, противоположное числу x. По аналогии, при аддитивной записи произвольной коммутативной алгебраической операции элемент, симметричный для данного элемента x, обозначается $-x$ и называется ***противоположным*** для x.

При мультипликативной записи произвольной алгебраической операции элемент, симметричный для данного элемента x, обозначается x^{-1} и называется ***обратным*** для x. Итак, обратный элемент для элемента x определяется условиями: $x^{-1}\cdot x = x\cdot x^{-1} = 1$.

Если алгебраическая операция некоммутативна, например композиция отображений, то, как показывает этот пример (см. § 5), для данного элемента x ситуации с существованием и числом элементов, симметричных для x, могут быть самые различные:

– элемент x может не иметь симметричных элементов никакого типа;

– элемент x может иметь правые симметричные элементы, но не иметь левых симметричных элементов, либо наоборот;

– элемент x может иметь единственный (односторонний) симметричный элемент;

– элемент x может иметь более одного (одностороннего) симметричного элемента.

Однако при условии ассоциативности алгебраической операции можно утверждать следующее (сравните с теоремой 5.1.).

Утверждение 3. *Пусть $*$ – ассоциативная алгебраическая операция на множестве X; x – фиксированный элемент множества X.*

(i) *Если для x существуют левый симметричный элемент x' и правый симметричный элемент x'', то $x' = x''$.*

(ii) *Для любого элемента $x\in X$ существует не более одного симметричного.*

Доказательство. Вычислим композицию $x' * x * x''$, воспользовавшись ассоциативностью:

$x * x * x'' = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$,

$x' * x * x'' = x' * (x * x'') = x' * e = x'$.

Итак, $x' = x''$; часть (ii) очевидно следует из (i).

Определение 8. *Множество* G *с алгебраической операцией* $*$ *называется* ***группой****, если выполняются следующие условия, называемые* ***аксиомами группы****:*

(G I) *алгебраическая операция* $*$ *ассоциативна*;

(G II) *в* G *имеется нейтральный элемент*;

(G III) *для каждого элемента* $g \in G$ *существует симметричный элемент* $g' \in G$.

Если операция в группе G коммутативна, то G называется ***коммутативной*** или ***абелевой*** группой.

В произвольной группе $(G, *)$ помимо основной операции $*$ часто рассматривается еще одна алгебраическая операция в G, определяемая по правилу: $G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a * b'$. В случае абелевой группы и использования аддитивной записи эта операция выглядит так:

$$G \times G \to G, (a, b) \mapsto a + (-b).$$

Она называется ***вычитанием*** и обозначается знаком “–”. Итак, по определению

$$a - b = a + (-b).$$

В общем случае при использовании мультипликативной записи основной групповой операции эта новая операция называется ***делением***. Ее значение на паре элементов (a, b) обозначают $a : b$ или $\frac{a}{b}$. Итак, по определению

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}.$$

Упражнение 7. (i) *Покажите, что* $\mathbf{Z}$, $m\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ *– абелевы группы относительно операции сложения чисел.*

(ii) *Покажите, что* $\mathbf{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbf{R}\backslash\{0\}$, $\mathbf{R}^+$ *– абелевы группы относительно операции умножения чисел.*

(iii) *Покажите, что множество* $BF(X)$ *всех биективных преобразований непустого множества* X *есть группа относительно операции композиции отображений.*

(iv) *Покажите, что множество всех квадратных матриц* $M_2(\mathbf{R})$ *есть абелева группа относительно сложения матриц, а множество всех невырожденных квадратных матриц* $GL(2, \mathbf{R})$ *есть некоммутативная группа относительно умножения матриц.*

Очевидно, что если $(X, *)$ и $(Y, \circ)$ – два изоморфных множества с заданными на них алгебраическими операциями, то одно из них является группой тогда и только тогда, когда группой является другое. Если $(X, *)$ – группа и $f : X \to Y$ есть изоморфизм $(X, *)$ на $(Y, \circ)$, то f называется также ***изоморфизмом*** группы $(X, *)$ на группу $(Y, \circ)$.

Раздел математики, который изучает всевозможные группы, т. е. в основе которого лежат аксиомы (G I)–(G III), относится к алгебре и называется ***теорией групп***. Подробно группы изучаются в учебных курсах алгебры.

Пример множества целых чисел, на котором есть операции сложения и умножения, связанные между собой законами дистрибутивности, не единственный такого рода в математике. Подобные примеры являются основанием для следующего определения.

Определение 9. *Пусть К – множество с двумя алгебраическими операциями*: “+”(*сложением*) *и* “ $\cdot$ ” (*умножением*). *Множество К называется* ***кольцом***, *если выполняются следующие* ***аксиомы кольца***:

(K I) *множество К относительно сложения является коммутативной группой*, *группа* (K, +) *называется* ***аддитивной группой кольца*** K;

(K II) *умножение в К ассоциативно*;

(K III) *сложение и умножение в К связаны законами дистрибутивности*, *т. е. для любых* $x, y, z \in K$ *верны равенства*:

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \qquad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Кольцо (K, +, $\cdot$) называется ***коммутативным кольцом***, если умножение в K коммутативно. Кольцо (K, +, $\cdot$) называется ***кольцом с единицей***, если в K есть элемент 1, являющийся нейтральным элементом относительно умножения.

Примерами коммутативных колец, очевидно, являются множества ($\mathbf{Z}$, +, $\cdot$), ($m\mathbf{Z}$, +, $\cdot$), ($\mathbf{Q}$, +, $\cdot$), ($\mathbf{R}$, +, $\cdot$). Здесь “+” и “ $\cdot$ ” – операции сложения и умножения чисел соответственно. Все эти кольца с единицами, за исключением кольца ($m\mathbf{Z}$, +, $\cdot$).

Упражнение 8. *Определим на булеане* $P(X)$ *множества* X *алгебраическую операцию* ∇, *полагая для любых* $A, B \in P(X)$:

$$A \nabla B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A).$$

Операция ∇ *называется* ***симметрической разностью.*** *Покажите*, *что* ($P(X)$, ∇, $\bigcap$) *есть коммутативное кольцо с единицей.*

Упражнение 9. *Покажите*, *что множество квадратных матриц* $M_2(\mathbf{R})$ *с операциями сложения и умножения матриц является некоммутативным кольцом с единицей.*

Не имея целью развивать в этой книге далее элементы теории колец, отметим два важных факта, хорошо известных из арифметики и справедливых в любом кольце.

Лемма 1 (*правило умножения на нуль в кольце*). *Пусть* 0_K *– нуль аддитивной группы кольца K. Тогда для любого* $a \in K$ *верны равенства*:

$$0_K \cdot a = 0_K = a \cdot 0_K.$$

Доказательство. Поскольку $0_K + 0_K = 0_K$, то

$$(0_K + 0_K) \cdot a = 0_K \cdot a.$$

Левую часть последнего равенства ввиду дистрибутивности можно переписать как $(0_K \cdot a) + (0_K \cdot a)$, что дает равенство

$$(0_K \cdot a) + (0_K \cdot a) = 0_K \cdot a.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства элемент, противоположный к $0_K \cdot a$. Получим последовательно ряд верных равенств:

$$((0_K \cdot a) + (0_K \cdot a)) + (-0_K \cdot a) = (0_K \cdot a) + (-0_K \cdot a);$$

$$(0_K \cdot a) + ((0_K \cdot a)) + (-0_K \cdot a)) = 0_K;$$

$$(0_K \cdot a) + 0_K = 0_K;$$

$$0_K \cdot a = 0_K.$$

Аналогично устанавливается равенство $a \cdot 0_K = 0_K$.

Лемма 2 (*правило знаков*). *Для любых элементов a*, *b* кольца *K верны равенства*:

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b); \quad a \cdot (-b) = -(a \cdot b); \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

Доказательство. Имеем, с одной стороны,

$$(a + (-a)) \cdot b = (a \cdot b) + ((-a) \cdot b),$$

а с другой –

$$(a + (-a)) \cdot b = (0_K \cdot b) = 0_K$$

ввиду леммы 1. Откуда

$$(a \cdot b) + ((-a) \cdot b) = 0_K, \text{ т. е. } (-a) \cdot \mathrm{b} = -(a \cdot b).$$

Аналогично доказывается, что $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. Наконец, $(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$.

Определение 10. Полем *называется коммутативное кольцо с единицей* $(P, +, \cdot)$, *в котором* $0 \neq 1$ *и для каждого ненулевого элемента существует обратный.*

Примерами полей являются множества $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ и $(\mathbf{R}, +, \cdot)$.

Упражнение 10. *Проверьте*, *является ли полем кольцо* $(P(X), \nabla, \bigcap)$?

Упражнение 11. *Постройте поле из двух элементов. Докажите, что все такие поля изоморфны. Существует ли поле*, *в котором ровно один элемент*?

§ 8. СНОВА АКСИОМЫ: ПОДСТАНОВКИ, РЕГУЛЯРНОСТИ И ВЫБОРА

В этом параграфе мы вновь возвращаемся к системе аксиом **ZF**. Отметим прежде всего, что данное выше определение отображения $f: A \to B$ как подмножества специального типа в декартовом произведении $A \times B$ (определение 1.3) в равной мере употребимо в канторовой теории множеств и в теории множеств, основанной на системе **ZF**. Следующее утверждение является основополагающим почти во всех разделах математики.

Теорема 1. *Для каждого отображения $f: A \to B$ существует его образ* $\mathbf{Im}\, f$.

Доказательство. Множество $\mathbf{Im}\, f$ – это подмножество множества B, которое выделяется следующей высказывательной формой $\mathsf{P}(y)$:

$$\exists a \in A \ \ (a, y) \in f.$$

Таким образом, существование образа отображения, заданного на произвольном множестве, легко решается с помощью аксиомы выделения.

Эта же аксиома применяется в доказательстве следующего утверждения.

Теорема 2. *Для произвольных множеств A и B существует множество всех отображений множества A в множество B.*

Доказательство. В § 1.7 доказано существование декартова произведения $A \times B$. Согласно аксиоме $\mathbf{ZF_{III}}$, существует множество-степень $P(A \times B)$ всех подмножеств множества $A \times B$. Определим на $P(A \times B)$ высказывательную форму $\mathsf{P}(Z)$ следующим образом:

$$\forall\, a \in A \ \ \exists!\, b \in B \ \ (a, b) \in Z.$$

В силу аксиомы выделения существует подмножество множества $A \times B$, являющееся областью истинности этой формы:

$$\{Z \in P(A \times B) \mid P(Z)\}.$$

Очевидно, что элементами этого подмножества являются все отображения множества A в множество B и только они. Теорема доказана.

Как всегда, подмножество, определяемое аксиомой выделения задается однозначно. Множество всех отображений множества A в множество B обозначим символом B^A. Если A или B – пустое множество, то $A \times B = \varnothing$ и, следовательно, $B^A = \varnothing$. *При непустых A и B множество всех отображений A в B также непусто.* Действительно, фиксируем в множестве B какой-либо элемент b и определим с помощью аксиомы выделения отображение f, положив

$$f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = b\}.$$

Рассмотрим теперь более сложную стуацию по сравнению с теми, которые возникали в теоремах 1 и 2. Предположим, что задана высказывательная форма $\mathbf{P}(x,\ y;\ z_1,...,z_n)$, имеющая хотя бы две свободные переменные x и y. Пусть, далее, известно, что при фиксированных значениях переменных $z_1,...,z_n$ любому значению переменной x однозначно сопоставлено значение переменной y, при подстановке которых в форму $\mathbf{P}$ получается истинное высказывание. Возникает вопрос: образуют ли множество те элементы y, для которых $\mathbf{P}(a,\ y;\ z_1,\ ...,\ z_n)$ истинное высказывание, если a “пробегает” произвольное множество A? Положительный ответ на этот вопрос гарантируется следующей аксиомой.

$\mathbf{ZF_{VI}}$ – *аксиома подстановки.* *Пусть* $\mathbf{P}(x,\ y;\ z_1,\ ...,\ z_n)$ *– высказывательная форма, описанная выше. Тогда истинно следующее*

$$\forall z_1, ..., z_n\, (\forall x\, \exists! y\, \mathbf{P}(x,\ y;\ z_1, ..., z_n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\forall A\, \exists B\, \forall r\, (r \in B) \Leftrightarrow (\exists s\, (s \in A) \wedge P(s,\ r;\ z_1,\ ...,\ z_n))).$$

Иногда аксиому подстановки формулируют в несколько иной форме, опуская переменные $z_1,\ ...,\ z_n$, играющие роль параметров в высказывательной форме $\mathbf{P}(x,\ y;\ z_1,\ ...,\ z_n)$[1].

Из аксиомы подстановки вытекает, например, следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть A – множество, каждый элемент которого сам есть непустое множество, а C – фиксированное множество. Тогда существует множество B, элементами которого служат все множества C^X, где $X \in A$, и только они.*

Доказательство. Рассмотрим высказывательную форму с двумя свободными переменными x и Y:

$$\mathbf{P}(x,\ Y):\ (X - \textit{множество}) \wedge (y = C^X).$$

По теореме 2 для любого X существует единственный y такой, что $\mathbf{P}(x,\ Y)$ – истинное высказывание. Таким образом, посылка в аксиоме подстановки истинна. Следовательно, истинно и заключение этой аксиомы, которое в рассматриваемом случае представляет собой утверждение теоремы.

[1] См., например: Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М., 1970.

Отметим, что одна из предыдущих аксиом – аксиома выделения $\mathbf{Z_{II}}$ – частный случай аксиомы подстановки[1)].

Далее аксиома подстановки будет применяться без специального упоминания об этом. Например, определение вида: “*A – множество всех таких a, что …*” использует эту аксиому.

Следующая аксиома нужна для того, чтобы исключить “чрезмерно большие” множества (такие, например, как “множество всех множеств”).

$\mathbf{ZF_{VII}}$ **– *аксиома регулярности.*** *Если X – множество, все элементы которого являются множествами, то существует элемент $Y \in X$, обладающий свойством: никакой элемент множества X не является элементом множества Y.*

Убедимся, что принятие этой аксиомы позволяет избежать ситуации, лежащей в основе парадокса Рассела, когда некоторое множество является элементом самого себя.

Теорема 4. *Никакое множество не является элементом самого себя.*

Доказательство. Если A – некоторое множество, то согласно теореме 1.7.1 существует одноэлементное множество $\{A\}$. Применим к последнему множеству аксиому регулярности, т. е. рассмотрим множество $\{A\}$ в качестве X: $X = \{A\}$. Элемент Y, существование которого гарантируется аксиомой, также совпадает с A, ведь в X нет других элементов. Следовательно, A, будучи элементом множества X, не является элементом множества A: $A \notin A$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Для каждого множества A верно:* $A \neq \{A\}$.

Доказательство. Действительно, если допустить, что $A = \{A\}$, то $A \in \{A\} = A$, т. е. множество A является элементом самого себя, что противоречит теореме 4.

$\mathbf{ZF_{VIII}}$ **– *аксиома выбора.*** *Пусть X – непустое множество,* $P^*(X)$ *– множество всех его непустых подмножеств. Тогда существует отображение* $\varphi : P^*(X) \to X$, *такое, что* $\varphi(A) \in A$ *для каждого* $A \in P^*(X)$.

Эта аксиома комментировалась в § 6.

В главе 4 мы возвратимся к аксиоматике **ZF**.

[1)] См.: Коэн П. Теория множеств и континуум-гипотеза. М., 1969. С. 98–99.

ГЛАВА 3. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Имеется целый ряд практических задач, которые можно сформулировать следующим образом.

Пусть задано несколько совокупностей (или одна) каких-либо предметов (букв, геометрических фигур, цветных фишек, самолетов и т. п.). Требуется составить из них комбинации[1)], которые удовлетворяли бы некоторым предписанным правилам. Часто важным является не само построение комбинаций, а подсчет их числа, при этом оговорено, какие комбинации считаются равными. Такие задачи называются *комбинаторными.* Они и положили в XVI в. начало развитию раздела математики, называемого ныне ***комбинаторикой*** (или ***комбинаторным анализом***).

В настоящей главе приводятся лишь некоторые первоначальные факты из этого раздела, необходимые для дальнейшего продуктивного изучения математики.

§ 1. ПРАВИЛА СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Прямые вычисления, связанные с подсчетом возможных комбинаций, оказываются обычно весьма громоздкими. Однако в комбинаторике имеется ряд общих правил, позволяющих избежать утомительных выкладок. Два из них рассматриваются в этом параграфе. Заметим, что поскольку по своему характеру комбинаторные задачи связаны с перечислением конечного числа комбинаций, то сами эти задачи фактически являются задачами о подсчете числа каких-либо специальных подмножеств некоторых конечных множеств и тем самым относятся к теории множеств. Переходя к обсуждению правила суммы, рассмотрим следующий пример.

Задача 1. *В оркестре играют три альтиста, четверо скрипачей и два виолончелиста. Сколько исполнителей музыкальной пьесы, которая может быть исполнена либо на альте, либо на скрипке, либо на виолончели, имеется в оркестре?*

Решение. Заметим, прежде всего, что наша задача комбинаторная. Действительно, у нас имеются три совокупности объектов: альтисты оркестра, скрипачи и виолончелисты. Комбинации, число которых требуется подсчитать, – это просто любой представитель из этих совокупностей

[1)] Слово “комбинаторика” происходит от латинского *combinatio* (соединение), поэтому часто эти комбинации называются “соединениями”.

(предполагается, что каждый из музыкантов не играет на других инструментах). Решение теперь может быть получено следующим образом. Среди скрипачей мы можем найти четверых исполнителей, среди альтистов – трех. Следовательно, скрипачи и альтисты дают нам семерых исполнителей, и еще двух исполнителей мы найдем среди виолончелистов. Таким образом, общее число исполнителей равно $4 + 3 + 2 = 9$.

На языке теории множеств наша задача может быть сформулирована следующим образом. Пусть X – множество музыкантов оркестра; X_1 – подмножество элементов из X, обладающих свойством “быть скрипачом” или, проще, подмножество скрипачей. Аналогично пусть X_2 – подмножество виолончелистов, а X_3 – подмножество альтистов. По условию множества X_i попарно не пересекаются. Тогда множество элементов из X, принадлежащих хотя бы одному из подмножеств X_i, состоит из $|X_1| + |X_2| + |X_3|$ элементов.

Обобщением предыдущей ситуации является следующая теорема.

Теорема 1 (***правило суммы***). *Пусть X – некоторое непустое конечное множество и $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ – конечное множество свойств его элементов такое, что*:

(i) *множество* $X_i = \{x \in X \mid x$ обладает свойством $P_i\}$ *состоит в точности из m_i элементов* ($i = 1, 2, ..., m$);

(ii) $X_i \cap X_j = \varnothing$, если $i \neq j$.

Тогда существует

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n$$

элементов из X, обладающих каким-либо из свойств P_i.

Доказательство. Применим индукцию по числу свойств P_i, т. е. по числу n. При $n = 1$ наше утверждение верно ввиду (i). Пусть теперь оно верно для множества свойств $P_1, P_2, ..., P_k$ и имеется свойство P_{k+1} такое, что множество $\{P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1}\}$ удовлетворяет (i) и (ii). Тогда, если элемент $x \in X$ удовлетворяет условию из $\{P_1, P_2, ..., P_k, P_{k+1}\}$, то он, согласно (ii), либо удовлетворяет одному из условий $\{P_1, P_2, ..., P_k\}$, либо удовлетворяет условию P_{k+1}. В первом случае по индуктивному предположению имеется $\sum_{i=1}^{k} m_i$ таких элементов, во втором ввиду (i) их число равно m_{k+1}. Добавив теперь к первым вторые и воспользовавшись условием (ii), получим, что число элементов, удовлетворяющих одному из свойств P_i, $i \in \{1, 2, ..., k + 1\}$ равно $(\sum_{i=1}^{k} m_i) + m_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} m_i$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если*

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n; \quad M_i \cap M_j = \varnothing \ \text{ при } \ i \neq j -$$

объединение n конечных попарно непересекающихся множеств и $|M_i| = m_i$, то

$$|M| = \sum_{i=1}^{n} m_i \,.$$

Обратимся теперь к правилу произведения.

Задача 2. *Из города A в город B ведут пять дорог, а из города B в город C – три дороги. Сколько путей из города A, проходящих через город B, ведут в город C?*

Решение. Заметим, что наша задача комбинаторная. Действительно, обозначим дороги, ведущие из A в B символами $\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5$, а дороги, ведущие из B в C, – символами $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Теперь мы имеем две совокупности: $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5\}$ и $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$. Комбинации, число которых требуется подсчитать, – это пары, составленные из элементов обеих совокупностей по правилу: первый из элементов пары принадлежит совокупности $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5\}$, а второй – совокупности $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$. Число вариантов движения из A в B равно 5. После прибытия в B можно двигаться по любой из дорог $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, поэтому число вариантов движения из A в C в три раза больше числа вариантов движения из A в B, т. е. общее число путей из A в C равно $5 \cdot 3 = 15$.

Более общей является следующая задача.

Задача 3. *Пусть $R_0, R_1, \ldots, R_n$ – города, снабженные сетью дорог: из R_0 в R_1 ведет m_1 дорог, из R_1 в R_2 – m_2 дорог и т. д. и, наконец, из R_{n-1} в R_n ведет m_n дорог. Требуется найти число путей из R_0, проходящих через $R_1, \ldots, R_{n-1}$ и ведущих в R_n.*

Решение задачи 3, как и многих подобных задач, основано на следующей теореме 2.

Теорема 2. *Если*

$$M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n -$$

декартово произведение n конечных множеств и $|M_i| = m_i$, то

$$|M| = m_1 m_2 \ldots m_n = \prod_{i=1}^{n} m_i. \tag{1}$$

Доказательство. Докажем формулу (1) индукцией по числу сомножителей n. Очевидно, что при $n = 1$ формула верна: $|M| = m_1$, так что имеем базу индукции. Предположим, что формула (1) верна при $n = k$ и рассмотрим ситуацию $n = k + 1$. Имеем

$$M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_{k+1} = \{(x_1, x_2, ..., x_{k+1}) |\, x_i \in M_i,\ i = 1, 2, ..., k + 1\}.$$

В множестве M_{k+1} фиксируем некоторый элемент a и положим

$$L_a = \{(x_1, x_2, ..., x_k, a) \mid x_i \in M_i, i = 1, 2, ..., k\}.$$

Очевидно, что если в качестве a последовательно брать каждый элемент множества M_{k+1}, то все L_a составят разбиение множества M, т. е.

$$M = \bigcup_{a \in M_{k+1}} L_a \quad \text{и} \quad L_{a_1} \cap L_{a_2} = \varnothing \ \text{ при } \ a_1 \neq a_2.$$

Очевидно также, что

$$|L_a| = |M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k|.$$

Учитывая далее следствие 1 и индуктивное предположение, получаем

$$|M| = \sum_{a \in M_{k+1}} |L_a| = m_1 m_2 \ldots m_k |L_a| = m_1 m_2 \ldots m_k m_{k+1}.$$

Доказано, что равенство (1) верно при $n = k + 1$, если оно верно при $n = k$. Теорема доказана.

Теперь приступим к формулировке правила произведения.

Пусть X – произвольное непустое множество. Рассматривается некоторое подмножество декартовой степени X^n, т. е. некоторое множество последовательностей длины n вида

$$(x_1, x_2, ..., x_n),\ x_i \in X \ \text{ для } \ i = 1, 2, ..., n. \qquad (2)$$

При этом не каждая, вообще говоря, последовательность (2) принимается в расчет, т. е. допускается, а именно: члены *допустимой* последовательности должны удовлетворять предписанным условиям, приводящим к запретам при выборе в X элементов x_i. Ограничения (запреты) диктуются условиями задач, к решению которых применяется правило произведения, и для разных задач свои. Для подсчета числа допустимых последовательностей нет необходимости знать природу ограничений, достаточно иметь лишь следующие условия (i) и (ii).

(i) Задана последовательность натуральных чисел

$$(m_1, m_2, ..., m). \qquad (3)$$

Количество элементов множества X, которые разрешено выбирать в качестве первого члена x_1 допустимой последовательности (2), равно первому числу m_1 из последовательности (3).

(ii) Если для $k < n$ первые k членов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ допустимой последовательности (2) уже выбраны, то число элементов множества X, которых разрешено выбирать в качестве x_{k+1}, равно m_{k+1}.

При условиях (i) *и* (ii) *требуется определить число m допустимых последовательностей вида* (2).

Теорема 3 (***правило умножения***).

$$M = m_1 m_2 \ldots m_n. \tag{4}$$

Существует другая, более формальная интерпретация предыдущих рассмотрений, которую мы также считаем полезной. С целью ее изложения дадим следующее определение.

Определение 1. *Пусть X – произвольное непустое множество и A – непустое подмножество n-й декартовой степени X^n. Назовем множество A k-элементарным* ($1 \le k \le n$), *если оно выделяется следующим условием:*

для всякого i, $1 \le i \le k$, i-е компоненты всех его элементов совпадают.

Правило произведения применяется к следующему кругу задач. В каждой такой задаче задано непустое множество X и подмножество $A \subseteq X^n$, удовлетворяющее следующему ***условию произведения*** (или ***условию дерева***).

Условие произведения. *В множестве A есть m_1 1-элементарных подмножеств. Каждое k-элементарное подмножество множества A состоит из m_{k+1} $(k + 1)$-элементарных подмножеств для всякого k,* $1 \le k \le n - 1$.

В этой ситуации требуется определить число элементов множества A. Правило произведения тогда гласит: $|A| = m_1 m_2 \ldots m_n$.

Обратимся теперь к доказательству теоремы 3.

Доказательство. Повторим почти дословно доказательство предыдущей теоремы 2. Докажем равенство (4) индукцией по числу сомножителей n. Очевидно, что при $n = 1$ это равенство верно. Предположим, что формула (3) верна для $n = k$ и рассмотрим ситуацию $n = k + 1$. Зафиксируем первые k членов допустимой последовательности $(x_1, x_2, ..., x_{k+1})$, пусть это будет

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k). \tag{5}$$

Согласно условию (ii), для выбора последнего члена x_{k+1} остается m_{k+1} возможностей, так что существует ровно m_{k+1} допустимых последовательностей длины $k + 1$, начала которых совпадают с последовательностью (5). Для любого другого выбора начала, согласно тому же условию (ii), существует столько же допустимых последовательностей. По нашему предположению, число попарно различных начал равно $m_1 m_2 \ldots m_k$. Следовательно, для $n = k + 1$ число всех допустимых последовательностей равно

$$(m_1\, m_2 \ldots m_k)\, m_{k+1} = m_1\, m_2 \ldots m_{k+1},$$

т. е. формула (4) верна при $n = k + 1$, если она верна при $n = k$. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 2 является следствием теоремы 3. Действительно, пусть требуется найти число элементов декартова произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, где $|X_i| = m_i$. Положим $X = X_1 \bigcup \ldots \bigcup X_n$. В рассматриваемой ситуации допустимой является всякая последовательность $(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_i \in X_i$, так что $|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n| = m_1\, m_2 \ldots m_n$.

Пример. Пусть имеется n лампочек, применяющихся для освещения рекламного щита, причем каждая из лампочек может загораться либо зеленым, либо красным цветом. Назовем способом освещения любую комбинацию, когда все лампочки включены. Требуется найти число различных способов освещения щита, если лампочки включаются независимо друг от друга. Две комбинации считаются различными, если хотя бы одна из лампочек в одной из комбинаций загорается зеленым цветом, а в другой – красным.

Решение. Пронумеруем все лампочки и рассмотрим множество M_i состояний i-й лампочки: M_i = {i-я лампочка горит красным цветом, i-я лампочка горит зеленым цветом}, состоящее, очевидно, из двух элементов. Поскольку всякий способ освещения есть не что иное как n-элементное множество состояний всех лампочек, причем эти состояния независимы друг от друга (т. е. $M_i \bigcap M_j = \varnothing$, при $i \neq j$), то применимо правило произведения. Следовательно, число различных способов освещения равно 2^n. Сочетание правил суммы и произведения позволяет найти достаточно простые решения для более широкого класса комбинаторных задач.

В качестве упражнения читателю предлагается решить следующую задачу о покупке пьес А. П. Чехова “Чайка” (Ч), “Три сестры” (Т) и “Дядя Ваня” (Д), изданных отдельно или в виде томов.

Упражнение 1. *В книжном магазине имеются*:

(Ч) – 6 *экземпляров*, (Т) – 3 *экземпляра*, (Д) – 4 *экземпляра*, (Ч) + (Т) – 5 *экземпляров*, (Т) + (Д) – 7 *экземпляров. Сколькими способами можно сделать покупку ровно по одной из каждой пьес*?

Установим теперь, помимо правила умножения, справедливость нескольких общих утверждений, полезных в теории множеств.

1. Число подмножеств конечного множества

Теорема 4. *Пусть F – конечное n-элементное множество. Тогда*

$$|P(F)| = 2^n.$$

Доказательство. Пронумеруем элементы множества F:

$$F=\{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

Каждое подмножество $A \subseteq F$ характеризуется своей функцией (см. § 2.1), т. е. последовательностью

$$\chi_A = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \text{ где } a_i = \begin{cases} 1, \text{если } x_i \in A, \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, число подмножеств в F равно числу всех последовательностей

$$(a_1, a_2, ..., a_n),\ \ a_i = 1 \text{ либо } a_i = 0.$$

По правилу произведения число этих последовательностей равно 2^n.

Замечание 2. Внимательный читатель, конечно, обнаружит сходство задач об освещении рекламного щита и о нахождении числа подмножеств данного множества.

Следствие 2. *Если X и Y – конечные непустые множества, $|X| = m$, $|Y| = n$, то число бинарных отношений между элементами этих множеств равно 2^{mn}.*

2. Число отображений

Теорема 5. *Пусть*

(i) *X и Y – конечные непустые множества, $|X| = m$, $|Y| = n$;*

(ii) *Z – множество всех отображений вида $X \to Y$;*

(iii) *U – множество всех инъективных отображений вида $X \to Y$;*

(iv) *V – множество всех биективных отображений вида $X \to Y$.*

Тогда

$$|Z| = n^m; \quad |U| = \begin{cases} n(n-1)...(n-m+1) \ \text{для} \ m \le n, \\ 0 \ \text{для} \ m > n; \end{cases}$$

$$|V| = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = n! \ \text{для} \ m = n, \\ 0 \ \text{для} \ m \ne n. \end{cases}$$

Доказательство[1]. Чтобы задать некоторое отображение $f : X \to Y$, требуется для каждого элемента $x \in X$ указать его образ $f(x)$. Образом элемента x может служить любой элемент множества Y, так что для вы-

[1] Число сюръекций подсчитано в § 4.

бора образа $f(x)$ одного элемента x имеется n возможностей. Согласно правилу произведения получаем

$$|Z| = \underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^m}_{m \text{ раз}}.$$

В качестве упражнения попробуйте проинтерпретировать рассмотренную задачу как задачу о способах освещения m лампочками, каждая из которых может загораться n цветами.

Перейдем к инъективным отображениям. Пусть

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}.$$

Очевидно, что при $m > n$ не существует инъекций вида $X \to Y$. Рассмотрим ситуацию, когда $m \le n$. Для выбора в Y образа $f(x_i)$ имеется n возможностей. Но если образы

$$f(x_1), f(x_2), ..., f(x_k)$$

уже выбраны, то для выбора $f(x_{k+1})$ остается только $n - k$ возможностей, поскольку

$$f(x_{k+1}) \neq f(x_1),\ f(x_{k+1}) \neq f(x_2), ..., f(x_{k+1}) \neq f(x_k).$$

Следовательно, по правилу произведения

$$|U| = n(n-1)\dots(n-m+1). \qquad (6)$$

Переходим к биективным отображениям. Очевидно, биекция вида $X \to Y$ существует, если и только если $|X| = |Y|$. При этом каждая инъекция окажется биекцией и, следовательно, формула (6) приводит к равенству

$$|V| = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

Теорема доказана.

§ 2. СОЧЕТАНИЯ И ПЕРЕСТАНОВКИ

Здесь рассматриваются комбинаторные задачи, связанные со специальными комбинациями.

Произвольное k-элементное подмножество некоторого множества X называется ***k*-сочетанием** (или просто ***сочетанием***) элементов множества X. Упорядоченная последовательность $(x_1, x_2, ..., x_k)$ длины k, составленная из попарно различных элементов множества X, называется ***k*-перестановкой**[1)] из элементов множества X. Тем самым *равенство перестановок* означает равенство последовательностей:

$$(x_1, x_2, ..., x_k) = (y_1, y_2, \dots, y_m) \iff k = m \text{ и } x_i = y_i \text{ для } i = 1, 2, ..., k,$$

тогда как *равенство сочетаний* есть равенство множеств.

[1)] Иногда k-перестановки называются также *размещениями*.

В курсе алгебры изучаются перестановки, содержащие каждый элемент исходного множества X, т. е. всегда $k = |X|$. В этой ситуации приставка "k" оказывается лишней и возникает термин "перестановка".

Пусть X – конечное n-элементное множество, P_n^k означает число k-перестановок из элементов этого множества, а $\binom{n}{k}$, или, что то же самое, C_n^k – число k-сочетаний элементов множества X.

Теорема 1. *Верны следующие равенства*:

$$\text{(i)}\, P_n^k = \begin{cases} n(n-1)...(n-k+1) \;\; \textit{для} \;\; k = 1, 2, ..., n, \\ 0 \;\; \textit{для} \;\; k > n. \end{cases} \tag{1}$$

В частности, *при* $k = n$ *имеем* $P_n^n = P_n = n!$ (2)

$$\text{(ii)} \binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \;\; \textit{для} \;\; k = 1, 2, ..., n, \\ 1 \;\; \textit{для} \;\; k = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство. Формулы (1) и (2) вытекают непосредственно из правила произведения. Для доказательства (3) заметим, что, согласно (2), из каждого k-подмножества можно составить $k!$ попарно различных k-перестановок. Поэтому

$$\binom{n}{k} = \frac{P_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

Равенство $\binom{n}{0} = 1$ очевидно: пустое подмножество составляет единственное 0-сочетание.

§ 3. БИНОМ НЬЮТОНА

Рассмотрим задачу представления многочлена $(x + y)^n$ в виде суммы одночленов.

Теорема 1. *Для произвольного натурального числа n верна следующая формула* ***бинома*** [1]***Ньютона***[2]:

---

[1] *Моном* – одночлен, *бином* – двучлен, *полином* – многочлен; *ном* (греч.) – доля, часть; *моно* (греч.) – один, единственный; *поли* (греч.) – много; *би* (лат.) – двойной, удвоение.

[2] Исаак Ньютон (1643–1727) – великий английский ученый. Хотя формула и носит имя И. Ньютона, однако постепенное ее освоение, начинавшееся с формул "квадрат суммы" и "куб суммы" прослеживается уже с XI в. Заслуга же И. Ньютона здесь состоит в открытии биномиального ряда (Математическая энциклопедия. Т. 1. М., 1977).

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k =$$

$$= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \ldots + \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + \ldots + \binom{n}{n} y^n. \qquad (1)$$

Доказательство. Формула (1) утверждает равенство двух многочленов. Перемножим n двучленов $x + y$:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\ldots(x+y)}_{n \text{ раз}}.$$

Учитывая ассоциативность и коммутативность сложения и умножения, заключаем, что $(x + y)^n$ равно сумме всех произведений вида

$$z_1\, z_2\, \ldots\, z_n, \qquad (2)$$

где z_i – либо первое слагаемое (x), либо второе (y) i-го двучлена. Очевидно, что

$$z_1\, z_2\, \ldots\, z_n = x^{n-k} y^k,$$

если в каких-то k скобках берутся y, а в остальных скобках – x. При фиксированном k, $k \in \{0, 1, ..., n\}$, число вариантов для выбора k скобок, из которых в качестве z_i берется y, равно $\binom{n}{k}$, поэтому среди произведений (2) одночлен $x^{n-k}y^k$ появляется $\binom{n}{k}$ раз. Откуда и вытекает формула (1). Теорема доказана.

Положив в (1) $y = 1$, получим для многочлена $(x + 1)^n$ разложение по степеням x:

$$(x+1)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} + \ldots + \binom{n}{k} x^{n-k} + \ldots + \binom{n}{n-1} x + 1. \qquad (3)$$

Числа

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$$

часто называют *биномиальными коэффициентами*, а последовательность

$$\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}\right) - \qquad (4)$$

n-й (“*энной*”) *строкой биномиальных коэффициентов*.

Известен ряд тождеств, связывающих биномиальные коэффициенты. Здесь приводятся только самые простые тождества:

1) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$;

2) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$;

3) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, если $0 \le k \le n$;

4) $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, если $1 \le k \le n-1$.

Тождества 1) и 2) получаются из формулы (3) при $x = 1$ и $x = -1$ соответственно. Тождество 3) очевидно: всякий раз, когда в n-элементном множестве X выбирается k-сочетание Y, фиксируется также $(n-k)$-сочетание X/Y, причем

$$Y_1 = Y_2 \Leftrightarrow X\backslash Y_1 = X\backslash Y_2.$$

Остается тождество 4). Пусть $|X| = n$; a – фиксированный элемент множества X; A – множество всех k-сочетаний множества X. Положим

$$A_1 = \{Y \subseteq A \mid a \notin Y\},\quad A_2 = \{Y \subseteq A \mid a \in Y\}.$$

Очевидно, что

$$A = A_1 \bigcup A_2,\quad A_1 \bigcap A_2 = \varnothing,\quad |A_1| = \binom{n-1}{k},\quad |A_2| = \binom{n-1}{k-1}.$$

По правилу суммы получаем

$$\binom{n}{k} = |A| = |A_1| + |A_2| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Тождество 4) доказано.

Упражнение 1. *С помощью тождества* 4) *и метода математической индукции дайте другое доказательство теоремы* 1.

Тождество 4) лежит в основе следующей конструкции. Рассмотрим треугольную таблицу T_n, изображенную на рис.1. В таблице $n + 1$ строк, в строке с номером i расположено $i + 1$ элементов. Элемент a_{ij} занимает позицию (i, j), т. е. находится в i-й строке и j-м столбце и является натуральным числом. Числа a_{ij} определяются следующими условиями:

$$a_{i1} = a_{ii+1} = 1 \text{ для } i = 1, 2, ..., n;$$
$$a_{ij} = a_{i-1j} + a_{i-1j-1}, \text{ если } i > 1,\ j < i + 1. \qquad (5)$$

Таблица, элементы a_{ij} которой определяются формулами (5), называется *треугольником Паскаля* T_n[1] (рис. 1, 2).

$$
\begin{array}{c}
1 \\
a_{11}\;\; a_{12} \\
a_{21}\;\; a_{22}\;\; a_{23} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{i-11}\;\; a_{i-12}\ldots\;\; a_{i-1j-1}\;\; a_{i-1j}\ldots\ldots\; a_{i-1i} \\
a_{i1}\;\; a_{i2}\ldots\ldots\;\;\ldots a_{ij}\ldots\ldots\;\; .a_{ii}\;\; a_{ii+1} \\
\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots \\
a_{n1}\; a_{n2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; a_{nn+1}
\end{array}
$$

Рис. 1. Таблица T_n

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1\quad 1 \\
1\quad 2\quad 1 \\
1\quad 3\quad 3\quad 1 \\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1
\end{array}
$$

Рис. 2. Треугольник Паскаля T_5

Треугольник Паскаля является удобным средством для нахождения биномиальных коэффициентов. А именно верна следующая теорема.

Теорема 2. *n-я строка биномиальных коэффициентов* (4) *совпадает с n-й строкой треугольника Паскаля*[2].

Доказательство. Для крайних элементов треугольника T_n имеем

$$a_{i1} = 1 = \binom{i}{0}, \quad a_{ii+1} = 1 = \binom{i}{i},\; i = 1, 2, ..., n; \tag{6}$$

в частности, утверждение теоремы верно для треугольника T_1. Далее индукция по n. Принимаем следующее индуктивное предположение: доказываемое верно при $n = i$, т. е.

$$\binom{i}{j} = a_{ij+1} \text{ для } j = 0, 1, ..., i. \tag{7}$$

---

[1] Блез Паскаль (1623–1662) – французский математик, механик, физик и философ.

[2] Нумерация строк начинается с нулевого номера.

Далее получаем, учитывая равенства (5)–(7):

$$a_{i+1j+1} = a_{ij+1} + a_{ij} = \binom{i}{j} + \binom{i}{j-1} = \binom{i+1}{j},$$

т. е. утверждение теоремы верно при $n = i + 1$. Так как при $n = 1$ оно также верно, то заключаем, что утверждение верно для любого n. Теорема доказана.

Упражнения

1. *Пусть p – простое число. Докажите, что p делит* $\binom{p}{k}$.

2. *На каждой стороне квадрата отмечены* $(n + 1)$ *точек, включая вершины (всего* $4n$ *точек). Сколько треугольников можно построить с вершинами в отмеченных точках?*

3. *Сколько различных прямоугольников можно вырезать из квадратного листа бумаги, размеченного на* n *равных квадратиков прямыми, параллельными сторонам листа? Прямоугольники вырезаются по линиям разметки. Каждый из* n^2 *квадратиков имеет свой номер (от* 1 *до* n^2*). Два прямоугольника считаются равными, если совпадают наборы номеров составляющих их квадратиков.*

4. *Пусть* $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ *– разложение натурального числа* $a > 1$ *в произведение степеней попарно различных простых чисел. Найдите число натуральных делителей числа a*[1]*.*

5. *Сколько существует шестизначных натуральных чисел, в десятичной записи которых нет нуля и пятерки?*

6. *Сколькими способами можно представить натуральное число* n *в виде суммы двух натуральных слагаемых? Можно считать порядок слагаемых либо несущественным, либо существенным. В первом случае считают, что* 9 = 5 + 4 = 4 + 5 *– одно и то же представление, во втором – что разные. Решите задачу в двух вариантах.*

7. Сколько существует телефонных номеров, содержащих комбинацию цифр 12? Считаем, что номер состоит из 7 цифр.

---

[1] Здесь мы предполагаем, что читателю известна основная теорема арифметики: всякое натуральное число a, $a > 1$, может быть единственным образом представлено в виде произведения простых чисел.

§ 4. ПРАВИЛО ВКЛЮЧЕНИЙ И ИСКЛЮЧЕНИЙ

Пусть

$$P_1, P_2, \ldots, P_m - \tag{1}$$

некоторый список свойств элементов конечного n-элементного множества X. Для произвольного фиксированного элемента $x \in X$ и каждого *индекса* (номера) $i \in \{1, 2, ..., m\}$ элемент x либо имеет свойство P_i, либо не имеет. Мы уже знаем, что каждое такое свойство P_i является характеристическим для некоторого подмножества в X, состоящего из всех элементов множества X, имеющих это свойство. Обозначив последнее множество той же буквой P_i, мы превращаем свойство P_i в множество всех элементов множества X, имеющих это свойство.

Положим

$$n_{i_1 i_2 \ldots i_k} = | P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \ldots \cap P_{i_k} |,$$

т. е. $n_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ есть число элементов множества X, имеющих каждое из свойств $P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_k}$.

Определим еще свойство P_0 следующим условием: элемент x имеет свойство P_0, если и только если x не имеет ни одного из свойств, входящих в исходный список (1). Положим

$$n_0 = |P_0| -$$

число элементов множества X, не имеющих ни одного из свойств, входящих в список (1).

В предыдущих обозначениях верна следующая теорема.

Теорема 1 (*правило включений и исключений*).

$$n_0 = n - \sum_{1 \le i \le m} n_i + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} n_{i_1 i_2} - \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le m} n_{i_1 i_2 i_3} + \ldots + (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 \ldots < i_k \le m} n_{i_1 i_2 \ldots i_k} +$$
$$+ (-1)^{m-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 \ldots < i_{m-1} \le m} n_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}} + (-1)^m n_{12\ldots m}. \tag{2}$$

В формуле (2) слагаемое

$$(-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 \ldots < i_k \le m} n_{i_1 i_2 \ldots i_k}$$

означает сумму всех слагаемых вида

$$n_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \tag{3}$$

где i_1, i_2, ..., i_k – произвольная k-перестановка индексов, упорядоченная по возрастанию, т. е.

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_k.$$

Например, пусть $X = \{1, 2, ..., 28\}$, а свойства P_1, P_2, P_3 элементов множества X определены следующим образом:

P_1: x делится на 2, т. е. $P_1 = \{2, 4, ..., 28\}$;
P_2: x делится на 3, т. е. $P_2 = \{3, 6, ..., 27\}$;
P_3: $x \le 13$, т. е. $P_3 = \{1, 2, \dots , 13\}$.

Имеем:

$n_1 = 14$, $n_2 = 9$, $n_3 = 13$;
$n_{12} = | P_1 \cap P_2 | = 4$, $n_{13} = | P_1 \cap P_3 | = 6$, $n_2 = | P_2 \cap P_3 | = 4$;
$n_{13} = | P_1 \cap P_2 \cap P_3 | = 2$;
P_0 : $x > 13$ и не делится ни на 2, ни на 3.

Теорема утверждает, что

$|P_0| = 28 - n_1 - n_2 - n_3 + n_{12} + n_{13} + n_{23} - n_{123} = 28 - 14 - 9 - 13 + 4 + 6 + 4 -$ $- 2 = 4$.

Доказательство теоремы. Определим матрицу M некоторого специального вида.

Определяемая матрица M имеет n строк (число элементов в X) с множеством номеров

$$\{1, 2, ..., n\}. \tag{4}$$

Нумерация столбцов будет несколько “изощренней”: номерами столбцов матрицы M служат число 0 и все возрастающие последовательности длин $1, 2, ..., m$, составленные из элементов множества индексов $\{1, 2, ..., m\}$.

Таким образом, для элемента $M_{\alpha\beta}$ матрицы M, занимающего позицию (α, β), номер строки α “пробегает” множество (4), а

$$\beta = 0,\ i_1, i_1i_2, ..., i_1i_{2\dots}\, i_k, ..., i_1i_{2\dots}\, i_{m-1},\ 12\dots m,$$

где для любого $k \in \{1, 2,\dots, m\}$ в качестве $i_1i_2\dots i_k$ берется любая возрастающая k-перестановка множества индексов.

Например, при $m = 4$, $n = 3$ матрица M имеет три строки и шестнадцать столбцов с номерами

0, 1, 2, 3, 4,
12, 13, 14, 23, 24, 34,
123, 124, 134, 234,
1234.

Теперь занумеруем элементы исходного множества X:

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

и определим элемент $M_{\alpha\beta}$ следующими двумя условиями:

1. $M_{\alpha 0} = \begin{cases} -1, \text{если } x_\alpha \in P_0, \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$

2. Для $\beta = i_1 i_2 \ldots i_k$

$$M_{\alpha\beta} = \begin{cases} (-1)^k, \text{если } x_\alpha \in P_{i_1} \cap P_{i_2} \cap \ldots \cap P_{i_k}, \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица M полностью определена.

С помощью этой матрицы совсем просто получить доказательство теоремы. Действительно, пусть S_α – сумма элементов строки матрицы M, имеющей номер α; T_β – сумма элементов столбца матрицы M с номером β, а S – сумма всех элементов матрицы M. Тогда сумма S равна сумме всех S_α, $\alpha = 1, 2, ..., n$:

$$S = \sum_\alpha S_\alpha.$$

С другой стороны, $S = \sum_\beta T_\beta$, где β "пробегает" множество номеров столбцов матрицы M. Сопоставляя два последних равенства, получаем

$$\sum_\alpha S_\alpha = \sum_\beta T_\beta. \tag{5}$$

Теперь подсчитаем S_α при фиксированном номере α. Имеем

$$S_\alpha = \sum_\beta M_{\alpha\beta}.$$

Далее различаем две ситуации: 1) $x_\alpha \in P_0$ и 2) $x_\alpha \notin P_0$.

1) В первой ситуации, по определению свойства P_0,

$$x_\alpha \notin P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_m,$$

так что в соответствии с определением матрицы M получаем

$$M_{\alpha 0} = -1, \quad M_{\alpha\beta} = 0 \text{ для } \beta \neq 0,$$

$$S_\alpha = -1. \tag{6}$$

2) Покажем, что и во второй ситуации верно равенство (6). Имеем $M_{\alpha 0} = 0$, элемент x_α имеет хотя бы одно свойство, входящее в исходный список свойств (1). Выпишем все те свойства P_i из списка (1), для которых $x_\alpha \in P_i$. Считаем (ради упрощения обозначений), что это первые r свойств:

$$x_\alpha \in P_i \text{ для } 1 \leq i \leq r, \quad x_\alpha \notin P_i \text{ для } r + 1 \leq i \leq n.$$

Теперь рассмотрим элемент $M_{\alpha\beta}$ с $\beta = i_1 i_2 \ldots i_k \neq 0$.

По определению элементов матрицы M

$$M_{\alpha\beta} = \begin{cases} (-1)^k, \text{ если } \{i_1, i_2, ..., i_k \subseteq \{1, 2, ..., \text{r}\}, \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тем самым

$$S_\alpha = \sum_\beta M_{\alpha\beta} = -r + \binom{r}{2} - \ldots + (-1)^{r-1}\binom{r}{r-1} + (-1)^r. \qquad (7)$$

Учитывая формулу бинома Ньютона, из (7) получаем

$$S_\alpha = (1-1)^r - 1 = -1.$$

Равенство (6) доказано.

Далее имеем

$$\sum_\alpha S_\alpha = -n. \qquad (8)$$

Очевидно, что для сумм элементов в столбцах матрицы M верны равенства:

$$T_0 = -n_0; \quad T_i = -n_i,\ i = 1, 2, ..., m; \quad T_{i_1 i_2 \ldots i_k} = (-)^k\ n_{i_1 i_2 \ldots i_k}.$$

Поэтому

$$\sum_\beta T_\beta = -n_0 - \sum_{1 \le i \le m} n_i + \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} n_{i_1 i_2} - \ldots +$$

$$+ (-1)^{m-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{m-1} \le m} n_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}} + (-1)^m n_{12\ldots m}. \qquad (9)$$

Из равенств (5), (8) и (9) вытекает нужное нам равенство (2). Теорема доказана.

Рассмотрим некоторые примеры, демонстрирующие полезность предыдущей теоремы.

1. Число элементов в объединении конечных множеств

Применим правило включений и исключений к той ситуации, когда

$$X = X_1 \bigcup X_2 \bigcup \ldots \bigcup X_m -$$

объединение конечных множеств X_i, а свойства P_i определяются следующим условием:

элемент $x \in X$ имеет свойство P_i, если и только если $x \in X_i$, $i = 1, 2, ..., m$.

Очевидно, что в этой ситуации

$$n_0 = 0, \quad n_i = |X_i|, \quad n_{i_1 i_2 \ldots i_k} = | X_{i_1} \bigcap X_{i_2} \bigcap \ldots \bigcap X_{i_k} |.$$

Так что формула (2) принимает вид

$$|X_1 \bigcup X_2 \bigcup \ldots \bigcup X_m| = \sum_{i=1}^{m} |X_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le m} |X_{i_1} \bigcap X_{i_2}| + \ldots$$

$$+ (-1)^{m-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 \ldots < i_{m-1} \le m} |X_{i_1} \bigcap X_{i_2} \bigcap \ldots \bigcap X_{i_{m-1}}| + (-1)^m |X_1 \bigcap X_2 \ldots \bigcap X_m|. \quad (10)$$

В свою очередь, формула (2) выводится из формулы (10). В самом деле, пусть задано n-элементное множество X и список свойств (1). Представим X в виде объединения

$$X = X_0 \bigcup X_1 \bigcup X_2 \bigcup \ldots \bigcup X_m, \quad (11)$$

где X_i – множество всех элементов множества X, имеющих свойство P_i (i = 1, 2, ..., m), а X_0 – множество элементов, не имеющих ни одного из свойств, входящих в список (1). Очевидно, что в этой ситуации формула (10), написанная для объединения (11), превращается в формулу (2), поскольку

$$n_0 = 0.$$

Таким образом, формула (10) и теорема 1 эквивалентны.

Формулу (10) также называют ***правилом включений и исключений***.

2. Задача о беспорядках

Пусть Y – конечное m-элементное множество, а X – множество всех m-перестановок множества Y. Тем самым элементами множества X служат все упорядоченные последовательности

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad x_i \in Y. \quad (12)$$

Перестановка x называется *беспорядком*, если $x_i \neq i$ для i = 1, 2, ..., m. Требуется найти число беспорядков в X.

Для решения этой задачи с помощью правила включений и исключений введем последовательность (1) свойств элементов множества X следующим образом:

перестановка x вида (12) *имеет свойство P_i, если и только если $x_i = i$.*

Теперь используем формулу (2). Очевидно, что P_0 совпадает с множеством всех беспорядков, так что искомое число беспорядков есть n_0. Далее, $n = m!$ – число всех перестановок множества Y. Очевидно также, что

$$n_i = (m-1)!, \quad n_{i_1 i_2 \ldots i_k} = (m-k)!$$

Тем самым

$$n_0 = m! - \sum_{i=1}^{m}(m-1)! + \ldots + (-1)^{m-1}\sum_{1\le i_1<i_2\ldots<i_{m-1}\le m} 1! + (-1)^m 0! =$$

$$= m!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^m}{m!}\right). \qquad (13)$$

Упражнение 1. *Пусть $f: X \to X$ – произвольное биективное преобразование множества X. Элемент $x \in X$ называется* ***неподвижной точкой*** биекции *f, если $f(x) = x$. Полагая, что X – конечное множество из m элементов, найдите число биективных преобразований этого множества, не имеющих неподвижных точек.*

3. Число сюръекций

Пусть Y и Z – конечные непустые множества, $|Y| = r$, $|Z| = m$. Требуется найти число всех сюръективных отображений множества Y в множество Z.

Обозначим буквой X множество всех отображений вида $Y \to Z$ и перенумеруем элементы множества Z:

$$Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}.$$

Для $i = 1, 2, \ldots, m$ определим свойство P_i элементов множества X условием

$$x \in P_i \iff z_i \notin \mathbf{Im}\, x.$$

Теперь применим формулу (2). В рассматриваемой ситуации P_0 оказывается множеством всех сюръекций вида $Y \to Z$, так что n_0 и есть искомое число. Имеем $n = |X| = m^r$. Множество P_i совпадает с множеством всех отображений вида $Y \to Z \setminus\{z_i\}$ и, вообще, $P_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ является множеством всех отображений вида $Y \to Z \setminus \{z_{i_1}, z_{i_2} \ldots z_{i_k}\}$. Поэтому

$$n_{i_1 i_2 \ldots i_k} = |P_{i_1 i_2 \ldots i_k}| = (m-k)^r.$$

Далее по формуле (2) получаем:

$$n_0 = m^r - \sum_{i=1}^{m}(m-1)^r + \sum_{1\le i_1<i_2\le m}(m-2)^r - \ldots + (-1)^{m-r}\sum_{1\le i_1\ldots<i_{m-1}\le m} 1^r =$$

$$= m^r - m(m-1)^r + \binom{m}{2}(m-2)^r - \ldots + (-1)^{m-r}\binom{m}{m-1}, \text{ т. е.}$$

$$n_0 = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^r.$$

Латинский алфавит								**Греческий алфавит**		
печатный		**курсивный**		**название**	**готическое письмо**			**печатный**		**название**
A	a	*A*	*a*	а	𝔄	𝔞	а	Α	α	альфа
B	b	*B*	*b*	бэ	𝔅	𝔟	бэ	Β	β	бэта
C	c	*C*	*c*	цэ	ℭ	𝔠	цэ	Γ	γ	гамма
D	d	*D*	*d*	дэ	𝔇	𝔡	дэ	Δ	δ	дельта
E	e	*E*	*e*	э	𝔈	𝔢	э	Ε	ε	эпсилон
F	f	*F*	*f*	эф	𝔉	𝔣	эф	Ζ	ς	дзета
G	g	*G*	*g*	гэ (жэ*)	𝔊	𝔤	гэ	Η	η	эта
H	h	*H*	*h*	ха (аш*)	ℌ	𝔥	ха	Θ	θ	тета
I	i	*I*	*i*	и	ℑ	𝔦	и	Ι	ι	йота
J	j	*J*	*j*	йот (жи*)	𝔍	𝔧	йот	Κ	κ	каппа
K	k	*K*	*k*	ка	𝔎	𝔨	ка	Λ	λ	ламбда
L	l	*L*	*l*	эль	𝔏	𝔩	эл	Μ	μ	мю
M	m	*M*	*m*	эм	𝔐	𝔪	эм	Ν	ν	ню
N	n	*N*	*n*	эн	𝔑	𝔫	эн	Ξ	ξ	кси
O	o	*O*	*o*	о	𝔒	𝔬	о	Ο	ο	омикрон
P	p	*P*	*p*	пэ	𝔓	𝔭	пэ	Π	π	пи
Q	q	*Q*	*q*	ку	𝔔	𝔮	ку	Ρ	ρ	ро
R	r	*R*	*r*	эр	ℜ	𝔯	эр	Σ	σ	сигма
S	s	*S*	*s*	эс	𝔖	𝔰	эс	Τ	τ	тау
T	t	*T*	*t*	тэ	𝔗	𝔱	тэ	Υ	υ	ипсилон
U	u	*U*	*u*	у (ю*)	𝔘	𝔲	у	Φ	φ	фи
V	v	*V*	*v*	вэ	𝔙	𝔳	фау	Χ	χ	хи
W	w	*W*	*w*	дубль-вэ	𝔚	𝔴	вэ	Ψ	ψ	пси
X	x	*X*	*x*	икс	𝔛	𝔵	икс	Ω	ω	омега
Y	y	*Y*	*y*	игрек	𝔜	𝔶	ипсилон			
Z	z	*Z*	*z*	зэт	ℨ	𝔷	цэт			

Примечание. Звездочкой отмечены названия соответствующих букв, которые используются, как правило, в устной речи (под влиянием современных языков, имеющих латинскую основу, – английского, французского и др.).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

И

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Х

Ч

Э

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Кононов Сергей Гаврилович
Тышкевич Регина Иосифовна
Янчевский Вячеслав Иванович

**ВВЕДЕНИЕ
В МАТЕМАТИКУ**

Учебное пособие для студентов
механико-математического факультета
специальности G 31 03 01 “Математика”

В трех частях

Часть 1

МНОЖЕСТВА И ФУНКЦИИ

Редактор *Н. Ф. Акулич*
Художник обложки *Л. А. Стрижак*
Технический редактор *Т. К. Раманович*
Корректор *Г. М. Добыш*
Компьютерная верстка *Т. А. Крашениной*

Подписано в печать 26 05.2003. Формат 60×84/16. Бумага офсетная Гарнитура Таймс
Печать офсетная Усл печ л 10,0 Уч -изд л 11,29 Тираж 500 экз Зак. 675

Белорусский государственный университет
Лицензия ЛВ № 315 от 14 07 98.
220050, Минск, проспект Франциска Скорины, 4

Отпечатано с оригинала-макета заказчика.
Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета»
Лицензия ЛП № 461 от 14 08 2001
220030, Минск, ул Красноармейская, 6

С. Г. КОНОНОВ
Р. И. ТЫШКЕВИЧ
В. И. ЯНЧЕВСКИЙ

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИКУ

В трех частях

Часть 1

Учебное пособие